FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound a

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS II.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXIV.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVIII.

16.70299 apr. 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXIV.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

Conſtruction d'un nouveau bâtiment académique - - - - - 3.

Etabliſſement de quatre cours publics - - - - - 4.

Lettre de Sa Majeſté Impériale *concernant cet établiſſement* - 5.

Arrangement rélatif à la diminution du nombre des Académiciens externes - - - - - - 6.

Départ de S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw *& nomination de S. E. Mr. le Sénateur* de Streckalof *pour diriger l'Académie pendant l'abſence de la Princeſſe* - - - - - - - - 7.

Lettre de Sa Majeſté Impériale *concernant cette nomination* - - - - - - - - 8.

Préſent envoyé à la nouvelle Académie royale des Sciences de Madrit - - - - - - ibid.

Pag.

Arrangement pour l'impreſſion des mémoires envoyés à l'Académie, par des Savans étrangers - - - 9.

Retour de Madame la Princeſſe de Daſchkaw - - ibid.

Prorogation de la diſtribution du Prix annuel - - 10.

Emplacement ſolemnel du buſte de feu M. Leonhard Euler, *dans la Salle d'Aſſemblées* - - - 11.

Acquiſitions - - - - - - - - 12.

Ouvrages académiques publiés dans le courant de l'année 13.

Augmentations de gages, avancemens, promotion & reception - - - - - - - 14.

Morts - - - - - - - - - 15.

Précis de la vie de M. Lexell. - - - - 16.

Ouvrages imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou donnés à l'Académie - 20.

Lettres de S. E. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus

1.) *Sur un microscope achromatique d'une nouvelle conſtruction &c. adreſſée à Mrs. de l'Académie* 41.

2.) *Sur les volcans de la Lune, adreſſée à M. le Conſeiller de Collèges* Pallas. - - - 50.

Extrait des Mémoires contenus dans ce Volume

Claſſe de Mathématique - - - - - 55.

Claſſe de Phyſico-Mathématique - - - 72.

Claſſe de Phyſique - - - - - 82.

Claſſe d'Aſtronomie - - - - - 95.

V.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS TOMVS II.

Cum XI. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *Commentatio de curuis tractoriis. Tab. I. fig.* 1 —— 6. - - - - - 3.

—— —— *De curuis tractoriis compoſitis. Tab. I. fig.* 7. 8 - - - - - - 28.

—— —— *De transformatione ſeriei diuergentis* $1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4$ *etc. in fractionem continuam* - - - - - 36.

—— —— *De ſummatione ſerierum in quibus terminorum ſigna alternantur* - - - - - 46.

NICOL. FVSS. *Problematum quorundam ſphaericorum ſolutio. Tab. II. fig.* 1 —— 5 - - - 78.

FRIED. THEOD. SCHVBERT. *De proiectione ſphaerae in ſuperficiem conicam Tab. III. fig.* 1. 2. 3 84.

—— —— *De proiectione ſphaerae ad determinandam aream maxime idonea. Tab. III. fig.* 4 - - 94.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *Conſideratio motus plane ſingularis qui in filo perfecte flexili locum habere poteſt. Tab. IV. fig.* 1. 2 - - - - - 103.

—— —— *Enodatio difficultatis ſuper figura terrae a vi centrifuga oriunda. Tab. IV. fig.* 3 - - - 121.

VI.

Pag.

JACQ. BERNOULLI. *Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extensible. Second mémoire. Tab. IV. fig. 4* - - - - - - - 131.

W. L. KRAFFT. *Essay relatif aux recherches de M.* de la Grange *sur l'attraction des sphéroides elliptiques* - - - - - - - - 148.

PHYSICA

J. J. FERBER. *Reflexions sur l'ancienneté relative des roches & des couches terreuses qui composent la croute du globe terrestre. Troisieme section* - - 163.

C. F. WOLFF. *De ordine fibrarum cordis. Dissertatio VI. quae repetitas et nouas obseruationes de fibris ventriculorum externis continet. Pars prior. Ventriculus dexter. Huc referuntur duae tabulae de ordine fibrarum cordis IV. et V.* - - - 181.

I. G. GEORGI. *Analysis chemica aquae fluuii Neuae urbem Petropolin perfluentis* - - - - - 221.

P. S. PALLAS. *Marina varia noua et variora. Tab. V. VI. et VII.* - - - - - - 229.

PETR. CAMPER. *Complementa varia Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae communicanda ad Clar. ac Celeb.* Pallas. *Tab. VIII et IX.* 250.

ASTRONOMICA

P. INOCHODZOW. *Observationes astronomicae Petropoli in specula academica anno* 1786. *habitae Tab. IV. fig. 5* - - - - - - 267.

STEPH.

VII.

Pag.

STEPH. RVMOVSKI. *De momento coniunctionis Mercurii cum Sole nec non latitudine illius, tempore transitus per discum Solis anno* 1756. *die* $\frac{23\ Aprilis}{4\ Maii}$ *t. c.* - - - - - - - 273.

—— —— *De transitu Mercurii per Solem, anno* 1756. $\frac{23\ Aprilis}{4\ Maii}$ *Bagdati obseruato* - - - - - - 281.

—— —— *Obseruatio eclipsis Solis, anno* 1787 *die* $\frac{5}{16}$ *Junii habita in obseruatorio Petropolitano* - - 287.

J. ALB. EULER. *Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en l'année* 1784. *suivant le nouveau stile* - - - - 288.

Errata.

Errata.

Pag.	222	*lin.*	20	*lege* erit B aqua infera
	223		10	In lagena
	225		10	modo habuit
	226		22	Franks
	227		16	centum.

HIS-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXIV.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant conſidéré la néceſſité indiſpenſable de conſtruire un nouveau bâtiment, dans lequel on puiſſe placer plus commodement la librairie, établir des magazins de livres, diſpoſer des ſalles plus vaſtes & mieux arrangées pour les Aſſemblées des Académiciens & les Leçons publiques, enfin loger divers Officiers de l'Académie, qui jusqu'aprés'ent demeurent dans des maiſonettes de bois caduques, qu'il faudra démolir pour la ſureté de la Bibliothéque & des autres départemens académiques qui ſe trouvent dans le voiſinage, Son Excellence avoit formé déja l'année précédente le projet d'un pareil édifice de 47 toiſes & demie de longueur pour être bâti ſur le bord de la Néva entre la Bibliotheque & les Collèges Impériaux, vis à vis du chantier de l'Amirauté: & après en avoir fait executer le plan par M. Guarengi, Architecte de l'Impératrice, elle le préſenta à Sa Majeſté Impériale & La ſupplia d'aſſigner pour la conſtruction de ce nouveau bâtiment, qui ſelon le devis de pluſieurs Architectes coutera environ 106 mille roubles, une

ſomme de 79 mille payable en quatre ans, eſpérant de ſuppléer le reſte de la caiſſe économique de l'Académie. Sa Majeſté approuva non ſeulement ce plan en applaudiſſant au zéle de Madame la Princeſſe, mais Elle ordonna encore que 15 mille roubles fuſſent payés tout de ſuite par le Cabinet, pour pouvoir commencer ſans délai la conſtruction du nouveau édifice, qui outre ſa néceſſité & ſon utilité immanquables devoit devenir un des plus beaux ornemens de la ville. En conſéquence de cet ordre gracieux, on commença encore en hyver à piloter le terrein, & en moins d'une année le fondement avec l'étage du rez de chauſſée revétu d'un beau granit furent déja achevés. Ce bâtiment tel qu'il a été approuvé & executé enſuite, ſe trouve repréſenté ſur la vignette qui decore le tître de ces nouveaux Actes. L'Architecture comme on l'y voit eſt ſimple & noble: la façade principale tournée vers l'Amirauté, eſt ornée de huit colonnes Joniques, & peut paſſer pour un modele de bon gout.

Un des ſoins principaux de Madame la Princeſſe étant d'augmenter les fonds de la caiſſe économique de l'Académie, la premiere année de ſa direction ſe trouva à peine écoulée, qu'elle l'avoit fait monter malgré les dépenſes extraordinaires dans tous les départemens académiques à une ſomme conſidérable; & comme elle croyoit de ſon devoir d'employer cette premiere épargne qui ſe trouva être de 30 mille roubles, à un bien de la patrie qui fut réel & qui répondit directement aux ſoins maternels de l'Auguſte Souvéraine, elle conçut l'idée d'établir des cours publics de ſciences donnés en langue ruſſe, dont non ſeulement les étudians & les éléves de l'Académie pourroient profiter, mais qui ſeroient auſſi ouverts à des auditeurs étrangers, par où ces cours deviendroient d'autant plus utiles que les ſciences étant transferées dans la langue du païs répandroient d'avan-

d'avantage leur lumiere. Mais pour donner à un tel établiſſement une autorité & une conſiſtance plus grande, Madame la Princeſſe trouva bon de s'addreſſer encore à la Souveraine & de ſupplier Sa Majeſté d'agréer & d'ordonner que la ſusdite ſomme ſoit dépoſée à la banque comme un capital permanent & que les 1500 roubles d'interêts ſoient employés à quatre cours publics, ſavoir de Mathématiques, de Phyſique, de Minéralogie & de Chymie, en payant à chacun des quatre Profeſſeurs ruſſes, qui voudront s'en charger, un honoraire annuel de 375 roubles: enfin que dans le cas qu'un de ces Profeſſeurs fut empêché de tenir ſes leçons ſoit par maladie ſoit par d'autres accidens, ſa part ſerve à augmenter le capital. Ce projet ne put que mériter l'approbation de la Souveraine, qui répondit en ces termes:

Княгиня Катерина Романовна! По содержанію доклада, отъ Васъ поданнаго, МЫ позволяемъ изъ собранной при Академіи Наукъ экономическої суммы отдать въ здѣшній Банкъ, для дворянства учрежденный, тринцать тысячь рублей, съ тѣмъ, чтобъ получаемые изъ сего капитала проценты по тысячѣ по пяти сотъ рублей на годъ обратить на жалованье четыремъ Россійскимъ Профессорамъ, кои будутъ преподавать Лекціи Математическія, Физическія, Минералогическія и Химическія

Princeſſe Cathérine Romanowna: Sur la requête que vous M'avez préſentée, Nous permettons de dépoſer à la Banque établie pour la Nobleſſe, les 30 mille roubles amaſſés dans la caiſſe économique de l'Académie des Sciences, & que les intérets de ce capital, ſavoir 1500 roubles, ſoyent employés à payer quatre Profeſſeurs ruſſes, qui donneront des Leçons publiques de Mathématiques, de Phyſique,

скїя на Россїйскомъ языкѣ. Пребываемъ въ прочемъ Вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА

Въ Царскомъ селѣ,
Апрѣля 20 дня,
1784 года.

sique, de Minéralogie & de Chymie en langue ruſſe. Étant au reſte

votre affectionnée
CATHÉRINE.

à Sarskoye Selo
le 20 Avril 1784.

Comme le nombre des aſſociés étrangers ſe trouva être très conſidérable malgré la perte de pluſieurs que l'Académie a faite dans le courant de l'année dernière, Madame la Princeſſe crut devoir pour l'honneur de cette aſſociation, prendre des méſures pour en diminuer la liſte. Elle fit en conſéquence déclarer & enrégiſtrer dans l'Aſſemblée du 5 Février le reglement ſuivant:

1.) Depuis le commencement de cette année 1784, l'Académie attendra toutes les fois ſix vacances, avant de paſſer à l'élection d'un nouveau membre externe.

2.) Ce ſeront alternativement les deux Claſſes de Mathématiques & de Phyſique qui propoſeront au Chef les ſçavans qu'elles jugeront mériter le plus cette diſtinction. La reception ſe fera enſuite dans une Aſſemblée des Académiciens & Adjoints, à la pluralité des voix & par la voie du ſcrutin.

3.) Le Chef ſe reſerve toutefois de faire des exceptions en faveur des Génies ſupérieurs, ou des ſçavans d'une célébrité diſtinguée, qui parviendront à ſa connoiſſance.

4.)

4.) Cet arrangement ſubſiſtera, jusqu'à ce que le Chef & l'Aſſemblee des Académiciens auront trouvé le nombre des aſſociés aſſés diminué pour pouvoir remplacer chaque vacance.

Le 22 Avril, Madame la Princeſſe addreſſa à l'Académie la notification ſuivante:

„ Ayant obtenu de Sa Majeſté Impériale la permiſ-„ ſion de m'abſenter pour trois mois à compter du 4 de Mai, „ je n'ai point voulu laiſſer l'Académie ſans un Vice-Directeur; „ de façon que j'en ai prié Sa Majeſté, qui à mon grand „ contentement a bien voulu nommer S. E. M. le Senateur „ de Strekalof, pour avoir ſoin des interéts de l'Académie pen-„ dant mon abſence: c'eſt donc à lui, Meſſieurs, que Vous au-„ rez à Vous adreſſer desormais &c."

La Princeſſe de Daſchkaw.

Madame la Princeſſe ne partit cependant que le 23 de Mai, & continua de diriger les affaires académiques jusqu'au dernier moment de ſon départ. M. le Conſeiller-Privé & Sénateur, Chevalier de Strekalof parut dès le lendemain 24 à l'Académie, & après y avoir pris poſſeſſion de la place du Directeur, il communiqua à l'Aſſemblée la lettre qu'il avoit reçue de Sa Majeſté l'Impératrice, rélativement à la direction de l'Académie dont il ſe trouvoit chargé jusqu'au retour de Madame la Princeſſe de Daſchkaw.

Cette lettre eſt conçue en ces termes:

Cme-

Степанъ Ѳедоровичь! Давъ позволеніе Княгинѣ Катеринѣ Романовнѣ Дашкавой по прошенію ея отлучиться на время для домашнихъ ея дѣлъ, МЫ поручаемъ Вамъ въ управленіе Санктпетербургскую Академію Наукъ до возвращенія Княгини Дашкавой. Пребываемъ въ прочемъ вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА.

Въ Царскомъ селѣ,
Апрѣля 13 дня,
1784 года.

Stepan Fédorovitſch. Ayant donné à la Princeſſe Cathérine Romanowna Daſchkaw, à ſa ſollicitation, la permiſſion de s'abſenter pour quelque temps, pour ſes affaires domeſtiques, Nous vous chargeons de la direction de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg jusqu'au retour de la Princeſſe de Daſchkaw; Étant au reſte votre affectionnée

CATHÉRINE.

Sarskoe Zelo
le 13 Avril 1748.

M. de Strekalof prit donc dès le 24 Mai les rènes de la direction des affaires académiques avec autant de zèle que d'aſſiduité, & il ſçut par ſa droiture & ſes manieres obligéantes ſe concilier en peu de temps l'eſtime & la confiance de toutes les perſonnes attachées à l'Académie.

M. le Conſeiller Privé & Chambellan actuel de Zinowief, Miniſtre de Sa Majeſté l'Impératrice à la Cour de Madrit, ſe trouva alors à St. Pétersbourg & apprit à M. de Strekalof que le Comte de Florida-blanca, Premier Secrétaire d'État de S. M. Catholique lui avoit fait entrevoir, qu'il ſouhaitoit d'acquerir pour la nouvelle Académie des Sciences qu'il ſe propoſoit d'établir à Madrit ſous la protection du Roi ſon maître, tous les mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg ainſi que les ouvrages de feu M. Euler. M. de Strekalof

kalof en donna connoiſſance à l'Académie, & ayant trouvé convenable de faire un préſent à la nouvelle Académie naiſſante de Madrit, de tout ce que ſon Illuſtre fondateur avoit demandé, il fut reſolu de ſaiſir l'occaſion du retour de M. de Zinowief à ſon poſte, pour envoyer une collection complette des dits mémoires & ouvrages académiques à S. E. M. le Comte de Florida-blanca avec une lettre que le Secrétaire lui écriroit au nom de l'Académie. Ce qui fut executé.

L'Aſſemblée des Académiciens reſolut le 26 Août, à l'occaſion d'un mémoire ſur les centres de gravité qui lui avoit été adreſſé par M. Lhuilier ſon Correſpondant, & à laquelle elle avoit accordé une approbation diſtinguée, de décréter que, comme l'Academie poſſede deja divers pareils mémoires intéreſſans envoyes par des ſavans étrangers, & qui ſous ce titre ne ſauroient être inſérés dans les Actes, elle en fera des collections ſéparées & les publiera ſous le titre de Memoires préſentés par des ſavans étrangers, à meſure qu'elle en aura reçu aſſés pour en faire un volume.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw revint de ſon voyage le 6 Septembre & releva M. de Strekalof dès le lendemain, en reprenant les fonctions de Directeur de l'Académie. Le Secrétaire lui fit un rapport de tout ce qui s'étoit paſſé dans les ſéances académiques pendant ſon abſence, & S. E. fit enrégiſtrer à celle du 13 Septembre, qu'elle conſentoit entiérement aux diverſes reſolutions priſes dans les aſſemblées des Academiciens & Adjoints; & qu'elle remercioit chacun de ces Meſſieurs en particulier du zèle avec lequel il a rempli ſes devoirs.

L'Académie devoit ſuivant l'uſage reçu, tenir vers la fin de l'année une Aſſemblée publique & y décerner le prix annuel:

nuel: celui de l'année préſente avoit pour ſujet une expoſition de la maniere que ſe fait la nutrition & l'accroiſſement des parties animales qui ſont déſtituées de vaiſſeaux, telles que les ongles, cornes &c. cette queſtion publiée en 1782 avoit encore été repétée dans le Programme de 1783, comme on peut la lire à la page 153e de la partie hiſtorique du 1er volume de ces nouveaux Actes. Cependant l'Académie n'avoit reçu qu'un ſeul mémoire ſur ce ſujet, & ce mémoire, outre qu'il étoit venu aprés le terme qui avoit été fixé au 1er Juillet de la préſente année, ne répondoit pas entiérement aux vües de la compagnie qui s'attendoit à quelque choſe de plus détaillé & de mieux conſtaté ſur une queſtion dont elle reconnoit les difficultés; il fut donc reſolu avec l'agrément de Madame la Princeſſe de Daſchkaw de ne point tenir d'Aſſemblée publique en cette année, & de publier ſimplement un nouveau Programme; d'y propoſer pour la ſeconde fois la même queſtion, & de fixer le terme de l'envoi des ouvrages au 1er Juillet 1786, en conſervant pour le concours le mémoire qu'elle avoit déja reçu, & qui eſt écrit en françois & déſigné par la deviſe: *Ignis vtique latet, naturam amplectitur omnem, cuncta parit, renouat, diuidit, vrit, alit.* Il ſeroit ſuperflu d'inſérer ici ce nouveau programme, qui contient encore une répétition de la queſtion minéralogique propoſée pour le prix de 1785: il ſuffira de rapporter, ce que l'Académie y avoit encore ajouté, ſavoir qu'elle ne s'attend à aucune explication complette, à aucune théorie parfaite de cette nutrition; mais qu'elle deſire qu'on y répande plus de jour, qu'elle exige ſeulement que tout ce que l'on avance, ſoit d'une entiere certitude, ou du moins de la plus grande probabilité. Qu'elle ſera même ſatisfaite ſi, ſans le ſecours de nouvelles expériences, on déduit de nouvelles aſſertions, d'une maniere nette & ſolide, des expériences déja connues, en les combinant heureuſement: mais qu'elle rejettera les hypothèſes qui ſeroient fon-

fondées arbitrairement ſur des phenoménes quelconques, & qu'il eſt toujours aiſé de diſtinguer d'avec les vérités évidentes & inconteſtables.

Mais au defaut d'une Aſſemblée publique, il y eut le 18 Décembre une ſolemnité qui ne fut pas moins intéreſſante; celle de l'emplacement du buſte de feu M. Euler, dans la ſalle d'aſſemblées. Après que Mrs. les Académiciens & Adjoints eurent pris unanimement la réſolution d'ériger à leurs dépens un monument à l'honneur de leur illuſtre Doyen, & que Madame la Princeſſe de Daſchkaw eut non ſeulement applaudi à cette marque de leur vénération, mais encore voulu y contribuer ſa part; il fut nommé un comité pour prendre des engagemens avec M. Rachette un des meilleurs ſculpteurs de la ville, qui avoit encore l'avantage d'avoir non ſeulement fréquenté beaucoup le defunt, mais qui en avoit déja fait avec le plus heureux ſuccès le médaillon après vie. Il fut donc arreté que cet artiſte feroit le buſte du defunt Académicien en marbre de Carrare: & Madame la Princeſſe outre la part qu'elle avoit à la dépenſe, envoya déja le 15 Mars une très belle colonne de marbre, qui fut placée à la ſalle d'aſſemblées & entourée d'un treillage de fer, pour ſervir de piedeſtal à ce buſte.

M. Rachette s'en acquitta à la grande ſatisfaction de toute l'Académie, & réuſſit dans la reſſemblance à un point, que perſonne ne méconnut dans le marbre les traits du grand homme qu'il repréſente. Tout ſe trouvant ainſi diſpoſé, Madame la Princeſſe de Daſchkaw fixa le jour pour la ceremonie de l'emplacement, & avertit Mrs. les Académiciens & Adjoints de ſe rendre à la ſalle de leurs aſſemblées vers 11 heures avant midi. Elle même y vint à l'heure nommée, &

après une courte expoſition du motif qui l'avoit engagé de convoquer cette aſſemblée extraordinaire, & qui fut de rendre un témoignage ſolemnel du grand cas qu'elle fait des vertus & des rares mérites du defunt Académicien Leonhard Euler, dont le nom ne périra jamais & que l'Académie ne ceſſera de régretter; S. E. s'approcha de la colonne placée vis-à-vis du fauteuil du Préſident, & après s'être fait donner le buſte, elle le poſa deſſus avec un ſentiment qui ſe dépeignit ſur tout ſon viſage, & qu'elle exprima par ces paroles „ l'Académie „ peut ſe glorifier d'avoir poſſedé un homme ſi grand dans les „ ſciences: & il eſt pour moi un honneur & une ſatisfaction „ très flatteuſe d'avoir poſé en votre préſence & au vrai or„ nement de cette ſalle, l'image de ce ſavant plein de mérites. "

L'Académie a fait pendant le courant de cette année pluſieurs acquiſitions, à la tête desquelles nous rapportons à bon droit, un portrait peint à l'huile & parfaitement reſſemblant de S. M. le Roi Stanislas Auguſte de Pologne, que ce Monarque, que l'Académie a l'honneur de compter au nombre de ſes Honoraires, a bien voulu envoyer en préſent. L'Académie le reçut vers la fin du mois d'Octobre, avec des témoignages d'une reſpectueuſe reconnoiſſance, & Madame la Princeſſe le fit placer dans la ſalle des aſſemblées académiques, à la place de celui de ce même monarque qui s'y trouvoit déja, mais qui étoit bien inférieur tant à l'égard de la peinture, qu'à celui de la reſſemblance.

L'Obſervatoire aſtronomique reçut une excellente Pendule faite par le célebre artiſte Arnold à Londres, que M. le Prof. Lexell avoit commandée pour l'Académie pendant le ſéjour qu'il a fait en Angleterre.

La

La Bibliothéque fut enrichie de la *Flora Auſtriaca* & *du Hortus Vndobonenſis*, deux ouvrages magnifiques & de grand prix, outre pluſieurs autres livres dont Madame la Princeſſe avoit ordonné de faire l'achat.

Les autres acquiſitions en livres & en productions d'hiſtoire naturelle, envoyées en partie de la part de Sa Majeſté Impériale, en partie par Madame la Princeſſe de Daſchkaw & par diverſes perſonnes, auteurs & éditeurs, ſe trouvent indiquées à l'Article des *Ouvrages préſentés &c.*

L'Académie publia dans le courant de cette année outre les volumes 8e & 9e de ſes Actes, qui comprennent le dernier ſemeſtre de 1780 & le premier de 1781, divers ouvrages ſcientifiques, entre lesquels ont un droit particulier d'etre indiqués ici:

Leonhardi Euleri Opuscula analytica, deux tomes in 4to dont le premier contient 14 & le ſecond 15 mémoires du defunt Académicien, qui n'avoient pas encore été imprimés.

Diſſertationes de vniformitate motus diurni Terrae: auctoribus Jo. Fr. Hennert et Paul. Friſio, ab Academia Imper. Scient. Petropolitana praemio coronatae. 4to c. f.

Mémoire ſur la Théorie des Machines à feu, auquel l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg a adjugé le Prix: par M. Seb. Maillard. 4to.

Sam. Gottl. Gmelins Reiſe durch Ruſsland, zur Unterſuchung der drey Natur-Reiche. 4ter Theil. Zweyte Reiſe nach Perſien in den Jahren 1772 — 1774, nebſt

dem Leben des Verfaſſers 4to: publié par ordre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw & avec l'approbation de l'Académie par M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw gratifia de la penſion académique de 200 roubles par an:

M. François Hermann, Profeſſeur de Technologie, & Correſpondant regnicole: préſentement à Cathérinbourg dans le Gouvernement de Perme.

M. Eric Laxmann, Conſeiller de Cour, ancien Académicien & Aſſocié libre, demeurant à Irkoutzk: propoſé pour la penſion, par l'aſſemblée des Académiciens & agréé par S. E. Mr. le Sénateur de Strekalof, pendant l'abſence de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, qui à ſon retour y donna ſon conſentement.

S. E. augmenta conſidérablement les gages de Mrs. les Académiciens Rouмovski, Krafft & Lexell.

Elle obtint pour Mrs. les Académiciens Inohodzof & Ozeretskovski & pour M. l'Adjoint Socolof le titre de Conſeiller de Cour, qui leur fut décrété au mois d'Octobre par le haut & dirigeant Senat, en conſéquence d'un rapport préſenté à Sa Majeſté l'Impératrice, par Madame la Princeſſe.

Sur les éloges réiterés que Mrs. les Académiciens des Claſſes de Mathématiques avoient donnés à l'aſſiduité & aux progrès du Sieur Martin Platzmann, élève en Mathématiques de M. l'Académicien Lexell, Madame la Princeſſe de Daſchkaw le fit propoſer à l'Aſſemblée du 15 Janvier pour être reçu au

au nombre des Adjoints : ſa reception ſe fit unanimement, & le nouvel Adjoint fut introduit le 29 du même mois, où il préſenta aux Académiciens aſſemblés, après les avoir remerciés ainſi que leur Illuſtre Chef de ſa promotion, un mémoire intitulé : *Solutio problematis ex methodo tangentium inuerſa*: inſéré dans le 10e volume des Actes.

Le 27 Septembre. Madame la Princeſſe propoſa pour être reçu au nombre des Correſpondans étrangers, M. Jean Gerhard Koenig, Docteur en Médecine & célèbre Botaniſte à Trankebar, pour avoir fait parvenir à l'Académie un herbier & une collection conſidérable de ſemences indiennes avec le catalogue, dont il lui avoit fait préſent. Le Diplome fut adreſſé à ſon ami M. le Conſeiller de Conferences Muller à Copenhagen, mais M. Koenig mourut à Trankebar le 31 Juillet 1785 avant de recevoir ce gage de la diſtinction & de la reconnoiſſance que lui avoit deſtiné l'Académie.

L'Académie a fait dans le courant de cette année trois pertes, dont la plus douloureuſe eſt celle de M. André Jean Lexell décédé le 30 Novembre matin, après n'avoir été allité que pendant peu de ſemaines. Madame la Princeſſe de Daſchkaw l'honora de ſon eſtime particuliere, & le regretta bien vivement avec toute l'Académie.

Le 7 Janvier mourut à Dresden, M. Jean Ernſt Zeiher, Docteur en Philoſophie & Medecine, ancien Aſſocié ordinaire de l'Académie Impériale des Sciences pour la Mechanique & la Phyſique expérimentale, Profeſſeur de Phyſique à l'Univerſité de Wittenberg & Surintendant du Cabinet de Phyſique & de

de Mathématique de S. A. Séreniſſime l'Electeur de Saxe à Dresden. Il nâquit à Weiſſenfels en Saxe en 1720: il fut appellé à St. Pétersbourg en 1756, où il arriva la même annee: il y rempliſſoit avec aſſiduité & zèle la place d'Académicien ordinaire & y fit imprimer diverſes pieces outre celles qui de lui ont été inſérées dans les Commentaires. Il quitta St. Pétersbourg & retourna dans ſa Patrie en 1764, où il a d'abord été Profeſſeur ordinaire à Wittenberg, & en dernier lieu depuis 1776 Surintendant du Sallon d'inſtrumens de Phyſique & de Mathématiques à Dresden.

Le 21 Juillet mourut à Paris M. Denis Diderot qui avoit été reçu au nombre des Académiciens en 1773, lorsqu'il ſe trouvoit à St. Pétersbourg, pour remercier & admirer de près l'Auguſte Souveraine, qui l'avoit comblé des marques de ſon eſtime & de ſa munificence.

Précis de la vie de M. Lexell.

André-Jean Lexell, Docteur en Philoſophie, Académicien ordinaire pour les Mathématiques, Membre des Academies Royales des Sciences de Stockholm & d'Upſal, de l'Académie Royale des Sciences de Turin & Correſpondant de celle de Paris: nâquit à Åbo le 24 Décembre 1740, de M. Jonas Lexell Magiſtrat de la même ville & Madélaine-Cathérine Björkegrén.

Il étudia à Åbo & s'appliqua de bonne heure aux ſciences abſtraites: il y prit le grade de Docteur en Philoſophie en 1760, après avoir disputé ſous la préſidence de M. Jacques Gadolino, Profeſſeur en Phyſique, & publié une diſſertation inaugurale intitulée *Aphorismi Mathematico-Phyſici.*

En

En 1763, M. Lexell ſe rendit à Upſala & s'y diſtingua par une Diſputation *de Methodo inueniendi lineas curuas ex datis radiorum oſculi proprietatibus*, qui lui valut la place de Lecteur en Mathématiques, & en 1766 celle de Profeſſeur au Corps des Cadèts de Marine. Mais l'arrivée de M. Leonhard Euler à St. Pétersbourg, les préparatifs qu'on y faiſoit pour obſerver en 1769 le paſſage de Venus devant le diſque du Soleil en huit différens endroits du vaſte Empire de Ruſſie, & le nouveau luſtre que l'Académie Impériale des Sciences alloit reprendre ſous le regne de Son Auguſte Protectrice CATHERINE II., furent pour M. Lexell des attraits trop forts pour ne pas chercher à participer aux travaux de cette Compagnie, & à profiter des lumieres des ſçavans illuſtres qui la compoſoient. Il fit dans cette vûe parvenir à l'Académie en 1768 un mémoire ſur le calcul intégral, intitulé: *Methodus integrandi nonnullis aequationum exemplis illuſtrata*, qui ne manqua point ſon but. Feu M. Euler chargé de l'examiner n'en porta non ſeulement un jugement très favorable, mais ce qui acheva d'en faire l'éloge, & ce qui mérite d'être rapporté, c'eſt que comme M. le Comte Wolodimer Orlov, qui dans ce temps dirigeoit l'Académie, objecta que c'étoit peut-être l'ouvrage de quelque habile Géomètre qui avoit bien voulu favoriſer M. Lexell, M. Euler y repliqua avec ſa vivacité ordinaire, que dans ce cas il n'y auroit que M. d'Alembert ou lui qui auroient pu le faire. Mais M. Lexell n'étoit alors connu ni de l'un ni de l'autre. Le Comte Orlov ne balança donc plus à envoyer à M. Lexell la vocation d'Adjoint pour les mathématiques, & M. Lexell l'accepta avec empreſſement: il obtint encore la même année, le 17 Octobre 1768, l'agrément de S. M. Suédoiſe & partit ſans délai pour St. Pétersbourg. Sa premiére occupation y étoit de ſe familiariſer avec les inſtrumens aſtronomiques, pour être en état de faire l'obſervation du paſſage

de Venus, dont il s'acquitta conjointement avec le Pere Meyer, que l'Académie avoit engagé à l'Obſervatoire pendant le temps de l'abſence de ſes Aſtronomes. M. Lexell s'attacha bientôt à feu M. Euler, qui l'employa à coucher par écrit tous les calculs & mémoires que ſon génie fécond méditoit. Il eut auſſi beaucoup de part à la nouvelle Théorie de la Lune & ſurtout à la détermination de la parallaxe du Soleil déduite des obſervations du paſſage de Venus, qui ſe trouve inſérée au XIV. Tome des nouveaux Commentaires. La réputation de M. Lexell s'accrut ainſi de jour en jour: En 1771 l'Académie le reçut au nombre des ſes Académiciens ordinaires, & le Comte Orlov lui donna une place d'Aſtronome: Les Académies de Stockholm & d'Upſala ſe l'aſſocierent en 1773 & 1774 & l'Académie Royale des Sciences de Paris lui envoya le diplome de Correſpondant en 1776. Le Roi de Suede ſon maître lui confera en 1775 la place de Profeſſeur en Mathématiques à l'Univerſité d'Åbo avec la permiſſion de reſter encore trois ans à St. Pétersbourg: cette permiſſion lui fut prolongée depuis deux fois d'une année; c'eſt à dire jusqu'en 1780. M. Lexell étoit ſur le point de quitter St. Pétersbourg pour aller ſe domicilier dans ſon lieu natal, & l'Académie l'auroit perdu immanquablement ſans la permiſſion que lui fit offrir M. de Domaſchnef, d'entreprendre un voyage littéraire par l'Allemagne, la France, & l'Angleterre, & de retourner ainſi par la Suede à St. Pétersbourg. M. Lexell ſe laiſſa tenter: il fut chargé des commiſſions de l'Académie & reçut pour cet effet une inſtruction par écrit. Il s'en acquitta à la grande ſatisfaction de l'Académie & revint ainſi en 1781, aprés une abſence d'un an, très content de ſa courſe.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui donna en 1783 la place vacante par la mort de M. Euler, & augmenta conſidé-

ſidérablement ſes appointemens. L'Académie royale des Sciences de Turin le reçut la même année au nombre des ſes Aſſociés externes, & le comité des Longitudes à Londres le mit en 1784 ſur la liſte des ſçavans, qui reçoivent tous les ouvrages que publie cet inſtitut rélativement à la détermination de la Longitude par mer.

M. Lexell n'en jouit gueres: il tomba malade encore avant l'hyver de cette année, & mourut fort regretté le 30 Novembre, d'une tumeur gangréneuſe ſuivie d'une fievre maligne.

M. Lexell parloit peu ſans être embaraſſé dans les cercles où il ſe trouvoit: il aimoit, il recherchoit même la bonne compagnie, & il en étoit payé d'un parfait retour.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, préſentés ou donnés à l'Académie en l'année 1784.

Dans l'Aſſemblée du Lundi 8 Janvier, S. Exc. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, Directrice de l'Académie, a envoyé & fait préſent au cabinet de Curioſités, un traineau de Kamtſchatka avec les harnois pour l'attelage de cinq chiens.

M. le Conſeiller de Colleges Pallas a expoſé & donné de la part de S. E. Mr. de Klitſchka Gouverneur-Général d'Irkutzk', une caiſſe contenant diverſes plantes marines cueillies aux isles Kouriles, ainſi qu'une tulipe de mer très bien conſervée, (*Lepas tintannabulum & lepas aurita* Lin.) qui furent transportées au cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 12 Janvier. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé les livres ſuédois indiqués ci-après, dont Sa Majeſté Impériale a daigné faire préſent à la Bibliotheque académique

Konunga Sagar, af Joh. Kankel 1670. fol.

Peringskiolds Heims Kringla 2 Tomes fol. Stockholm 1647.

Konunga ok Höfdinga Styrelſe. fol. Stockholm 1669.

Twâ gamla ſwenska Rymkrôniken af Joh. Hadorph. 2 Volumes in 4to Stockholm 1647.

Nor-

Nordisk Hjâlta Prydnad af Gulringar. 4to Stockholm 1739.
Gothrici et Rolfi Weſtrogothiae regum hiſtoria. 8vo Upſaliae 1664.
Herrauds och Boſa Saga. 8vo Upſal 1666.
St. Olaffs Saga på Swenske Rimfördom öfwer 200 år ſedan. 8vo.

Le même 12 Janvier. Madame la Princeſſe a encore fait remettre pour la Bibliotheque académique, onze cahiers écrits en différentes langues aſiatiques, qu'elle a reçus de la part de S. E. Mr. le Lieutenant-Général de Souvorof.

M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de l'élève Platzmann, digne d'éloges par ſon application: *Solutio Problematis geometrici.*

Le 19 Janvier. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', pour le jardin botanique & le cabinet d'Hiſtoire naturelle, diverſes ſemences apportées de Cherſon, ainſi que l'écorce d'une eſpèce de citrouille des mêmes environs, qui croit en forme de Turban.

Le 22 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre latine de M. Joſeph de Joſeph, datée de Gênes le 30 Juin 1783, qui prétend avoir trouvé une méthode de déterminer avec la plus grande exactitude la Longitude en mer, & qui l'offre aux Académies & ſçavans, en les invitant à une ſouſcription, pour lui faire une recompenſe proportionée à l'importance de ſa decouverte. Comme l'Académie s'eſt fait une loi de ne point répondre à de pareilles propoſitions, la ſuſdite lettre fut miſe à l'écart.

Le 26 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur Charles de Mertens, Docteur en Médecine: *Obſeruationes medicae* deux volumes in 8vo imprimés à Vienne, & de la part de M. Catteau, Paſteur de l'Egliſe françoiſe réformée à Stockholm, quelques exemplaires d'une lettre qu'il a fait imprimer ſur la mort de M. Wargentin, & qui en contient l'éloge. Ces exemplaires ont été diſtribués à Meſſieurs les Académiciens des Claſſes de Mathématiques.

Le 29 Janvier. Le Secrétaire à préſenté le Proſpectus de l'Cryſtographie de Bruxelles par M. Burtin, Médecin conſultant de la même ville.

M. le Prof. Ferber a remis le Proſpectus de l'ouvrage de M. de Trebra à Zellerfeld, intitulé: *Erfahrungen vom Innern der Gebirge.* L'Académie a ſouſcrit pour l'un & l'autre ouvrage.

Le 23 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale un *Oculus mundi* d'une rare beauté. L'Académie l'a fait dépoſer & enrégiſtrer dans ſon cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 26 Février. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Göttingen: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis per An.* 1783. *Vol. V.*

—— —— il a lu un rapport de M. Jährig daté de Gouſinoi Ozero le 13 Décembre, qui envoie un extrait allemand de trois divers écrits indiens originaux, concernant le Bourghan Schigimunich, ſa vie & ſa doctrine.

Le 8 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. de Klopman, Marechal de la Cour du

du Duc de Courlande & Chevalier des Ordres de Pologne, pour être dépoſée au cabinet académique, une médaille en argent qu'il a fait frapper en mémoire de l'acquiſition glorieuſe de la Crimée & du Couban.

Le même 8 Avril. M. le Prof. Krafft a préſenté & lu une lettre de M. le Conſeiller d'État actuel Aepinus, qui contient l'annonce d'un microſcope achromatique d'une nouvelle conſtruction propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur ſurface.

Le Secrétaire a préſenté une lettre circulaire imprimée de M. le Prof. Mederer à Frybourg en Brisgau, qui annonce un remede infaillible contre la rage, & qui invite les Sociétés & les ſçavans de le conſtater par de nouveaux éſſais. À cette lettre ſe trouverent jointes deux brochures rélatives à cette cruelle maladie: ſavoir *M. J. J. Mederer Syntagma de rabie canina* & *F. J. Kern Diſſertatio inauguralis medica de infallibili remedio prophylactico ſiphileos.*

—— —— l'annonce d'une déſcription détaillée de la diſſection du fameux Jean Bec de Hambourg, qui avoit ſuppléé par un né & un palais artificiels à ces parties de ſon viſage & de ſon goſier, qu'il avoit perdues, & qui avoit enſuite couru le monde pour gagner ſa ſubſiſtance en faiſant voir ces parties.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conſeiller de la Chancellerie Struve à Ratisbonne, datée du $\frac{15}{25}$ Janvier, qui envoie de la part de l'Auteur, M. Stoy, Prof. de la Pédagogie à Nurnberg: *Bilder-Academie für die Jugend, Ihro Königl. Hoheit dem Kronprinzen von Schweden zugeeignet. Achte Ausgabe, nebſt einigen Bogen Erklarung. Nürnberg* 1783. Il mande en même temps, avoir déja envoyé pour l'Académie & adreſſé à M. de Domaſchnef

maſchnef les parties précédentes de cet ouvrage, ſans avoir été honoré d'une réponſe. Le Secrétaire lui répondra que ni l'Académie, ni les perſonnes attachées à la Bibliotheque, en ont quelque connoiſſance.

—— —— il a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 6 Février, concernant les machines à feu, leur perfection par Mrs. Watt & Boulton, & les divers emplois qu'on en a faits en Angleterre, en rendant rotatoire le mouvement alternatif de ces machines.

—— —— il a préſenté diverſes obſervations météorologiques, qui lui avoient été adréſſées de Dublin, & de Varſovie.

Le 15 Avril. Mrs. les Académiciens Roumovski & Lexell ont communiqué une lettre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, qui les charge par ordre de Sa Majéſte l'Impératrice, d'examiner une horloge, qu'un artiſte de la nation a eu l'honneur de préſenter à la Souveraine, & qui ſe trouve dépoſée à l'Hermitage.

M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. de Bohle, Major des Ingénieurs, une pierre ſemblable à celle de Labrador, qu'il a découverte près de Strelna, & qui par ſa beauté ne cede en rien à celles des Indes. À cette pierre ſe trouva joint un mémoire hiſtorique, dont M. Krafft a fait la lecture.

Le Secrétaire a lu une lettre que M. Patrin, Correſpondant de l'Académie, lui a écrite de la fonderie de Nertſchinsk, le 21 Décembre dernier, & où il rend compte des excurſions & obſervations d'Hiſtoire naturelle qu'il a faites en 1782.

Le

Le 19 Avril. M. le Conſeiller d'Etat actuel de Stehlin a communiqué une lettre de M. le Prof. Scopoli, datée de Pavie le 15 Mars, qui envoie le proſpectus de ſon ouvrage intitulé: *Deliciae Florae & Faunae Inſubricae.*

Le 22 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, rélative à ſon prochain voyage de trois mois. Voyez ci-deſſus. pag. 7.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Aſtronome Bode à Berlin, datée du 25 Avril, qui annonce ſon ouvrage nouvellement publié ſur la Planète Uranus, dans lequel il prouve que cette étoile avoit déja été obſervée par Flamſtädt en 1690.

Le 3 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être préſenté & ſousmis au jugement de l'Académie, un mémoire de M. le Prof. Hermann; ſur la meilleure maniere de fondre & de forger le fer: Mrs. les Académiciens Pallas & Ferber après l'avoir examiné & en avoir fait un rapport avantageux dans une des ſéances ſuivantes, l'Académie en a publié une traduction ruſſe à l'uſage des nationaux qui poſſedent des minieres & fabriques de fer.

Le 10 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être préſenté à l'Académie: Rapport fait à l'Académie royale des ſciences de Paris, ſur la machine aëroſtatique inventée par Mrs. de Montgolfier. Et de la part de l'Auteur M. Lemort Démétigny, une diſputation pour le grade de Bachélier en Médecine à la faculté de Montpellier, intitulée: *Tentamen* Ψυχο-σωματο-ιατρικον: *ſeu conſpectus theſiformis de natura*

tura animae et corporis, ſiue de ſpiritu et materia quatenus Medicinam ſpectant.

Le 17 Mai. Le Secrétaire a préſenté le VIIIe Volume des *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, qui comprend le dernier ſemeſtre de l'année 1780.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé: Traité de la perſonnalité & de la réalité des loix, coutumes, ou ſtatuts, par forme d'obſervations; au quel on a ajouté l'ouvrage latin de Rodenburgh intitulé: *de jure quod oritur e ſtatutorum diverſitate*: par feu M. Louïs Boullenois, ancien Avocat au Parlement, deux tomes in 4to imprimés en 1766, avec une lettre de Mſgr. l'Ambaſſadeur Prince de Golitzin, datée de Vienne le 29 Avril, qui mande, que c'eſt le fils du defunt Auteur de cet ouvrage, qui a ſouhaité qu'il ſoit préſenté à l'Académie.

Le 24 Mai. Cette Aſſemblée a été préſidée par S. E. M. le Sénateur, Conſeiller-Privé & Chevalier de Strekalof, qui y a lu & communiqué la lettre de Sa Majeſté l'Impératrice, en vertu de la quelle il ſe trouve chargé de diriger l'Académie pendant l'abſence de Madame la Princeſſe de Daſchkaw. Voyez ci-deſſus, pag. 8.

Le Secrétaire a remis les ouvrages indiqués ci-après, que M. le Conſeiller d'État actuel & Chevalier de Peterſon, Réſident à Dantzig, lui a addreſſés pour les préſenter de la part des Auteurs.

1.) Genera et Species plantarum vocabulis characteriſticis definita. 8vo 1781. par M. le Docteur Wolff à Dantzig.

2.)

2.) Le même ouvrage augmenté de ce que l'Auteur avoit déja publié en 1776 ſur la même matiere, ſuivi d'une Concordance botanique.

3.) Précis hiſtorique des faits rélatifs au magnetisme animal jusques en Avril 1781, par M. Mesmer, Docteur en Médecine de la faculté de Vienne: traduit de l'allemand.

4.) Lettre d'un Médecin de la faculté de Paris à un Médecin du College de Londres: ouvrage dans lequel on prouve contre M. Mesmer, que le magnetisme animal n'exiſte pas.

5.) Obſervations ſur le magnetisme animal, par M. d'Eslon, Docteur-régent de la faculté de Médecine de Paris, & Premier-Médecin ordinaire de Msgr. le Comte d'Artois. Londres 1780.

Le 27 Mai. M. le Conſeiller de Colleges Pallas a préſenté de la part de M. Brunnich, Prof. d'Hiſtoire naturelle à Copenhague: *Litteratura Danica ſcientiarum naturalium: qua comprehenduntur. I.) Les progrés de l'Hiſtoire naturelle en Dannemarc & en Norwège. II.) Bibliotheca patria autorum & ſcriptorum ſcientias naturales tractantium*: en un volume *in* 8vo.

Le 3 Juin. Le Secrétaire a lu la lettre de remercîment de M. de Lagus, Aide de Camp de S. E. Mr. le Gouverneur-Général de Kaſchkin, reçu au nombre des Correſpondans regnicoles.

Le 10 Juin. Le Secrétaire a remis: *Bibliotheca viri, dum viverat, excellentiſſimi & experimentiſſimi Benj. Schwartz M. D. & Protophyſici Gedanenſis.* P. I — IV.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Sideau, adreſſée à Mrs. les Académiciens & accompagnée d'un mémoire au ſujet d'un nouveau inſtrument conſtruit d'après les principes de feu M. Euler, pour repréſenter ſur une table oppoſée, debout & en grandeur naturelle, les perſonnes placées derriere l'inſtrument. Mrs. les Académiciens Lexell, Fuſs & le Secrétaire ayant été nommés de ſe rendre chez cet artiſte, pour y voir & examiner l'effet du ſon inſtrument, ont rapporté dans la ſéance ſuivante, que c'eſt une application ingénieuſe de la lanterne magique & du microſcope ſolaire propoſés par feu M. Euler & inſérés au 3e Tome des nouveaux Commentaires: que cette machine repréſente avec aſſés de préciſion & de clarté les objets, lorsqu'ils ſont ſuffiſament illuminés, ſoit par le Soleil, ſoit par des bougies, & que ſa conſtruction fait honneur aux talens de M. Sideau, qui a ſçu ſurmonter aſſés heureuſement toutes les difficultés, qui s'oppoſent à une repréſentation en grandeur naturelle & droite.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a préſenté de la part de l'Auteur, Don Ferdinand Galliani, Conſeiller au Conſeil ſouverain du commerce de S. M. le Roi des deux Siciles: *De doveri dé principi neutrali verſo i principi guerreggianti e di queſti verſo i neutrali, libri due.*

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 28 Mai, où il s'agit de la decouverte d'un volcan dans la Lune par M. Herſchel, d'une nouvelle balance hydroſtatique inventée par M. Nicholſen, & de diverſes autres nouveautés littéraires intéreſſantes.

Le 17 Juin. M. le Prof. Fuſs a préſenté de la part de M. Fries, Chirurgien à Archangel, un flacon contenant dans de l'eſprit de vin, une partie du corps médullaire d'une ba-

laine

laine, trouvée à ſec à l'embouchure de la Duina, à 70 verſtes de la ville d'Archangel, avec la deſcription détaillie de cet animal & de ſes dimenſions. Sa longueur a été de 13 toiſes, & le diamètre de ſa groſſeur de 5 toiſes. La longueur des os maxillaires 10 arſchines & un quart, & le poids de ſa graiſſe de 1314 Poudes.

Le même 17 Juin, le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1786; von J. E. Bode, Aſtronom der Königl. Akademie der Wiſſenſchafften in Berlin.*

Le 21 Juin. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conſeiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, au ſujet de la decouverte d'un volcan dans la Lune, vû par M. Herſchel.

Le 1 Juillet. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie royale des ſciences & belles-lettres de Pruſſe, le Programme des queſtions, qu'elle propoſe pour les prix de l'année 1786.

—— —— il a lu une lettre de M. de Lagus, datée de Perme le 6 Juin, qui communique quelques obſervations ſur la crüe extraordinaire des eaux de l'Irtiche & de la Kama.

Le 8 Juillet. M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Docteur Bloch, Médecin à Berlin, qui envoie & ſoumet à l'approbation de l'Académie: *Pleuronectarum duplex ſpecies, Zebra & Dentatus*, en manuſcript avec des deſſins faits d'après nature.

Le 12 Août. S. E. Mr. le Conſeiller privé & Chevalier de Strekalof a remis pour être examiné par l'Académie,

un manuſcript intitulé: Découverte des principes de l'Aſtronomie par M. René Trottier: ouvrage à la portée de tout le monde, même des gens les plus ruſtiques, avec une lettre de l'Auteur datée de Paris le 13 Juillet. M. le Prof. Lexell ayant été nommé pour lire cet écrit, il en a fait ſon rapport à la ſéance ſuivante, où il dit que cette découverte prétendue eſt au deſſous de toute critique.

Le même 12 Août, le Secrétaire a lu une lettre de M. Janin de Combe blanche à Mrs. de l'Académie, datée de Lyon le 16 Avril, qui envoie deux brochures intitulés: 1.) Lettre ſur l'Antiméphiſtique. 2.) Premiere & ſeconde Lettre à M. Cadet, Apoticaire de Paris.

—— —— Il a préſenté de la part de l'Académie royale des ſciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie royale des ſciences. Année 1779. avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

Connoiſſance des mouvemens céleſtes, pour l'année commune 1785.

Le même ouvrage, pour l'année 1786.

& de la part des Auteurs:

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts, par Mrs. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune. Années 1782 & 1783, avec les ſupplémens.

M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de l'Auteur: Théorie du mouvement & de la figure elliptique des planètes, par M. de la Place, de l'Académie royale des ſciences de Paris.

Le

Le 19 Août. Le Secrétaire a lu des lettres de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datées d'Irkoutzk le 27 Avril, 18 Mai & 16 Juin, qui communique diverſes remarques de botanique & de minéralogie, ſurtout des obſervations fort intéreſſantes ſur la congélation du mercure. Il a auſſi envoié pour le cabinet académique une collection de foſſiles.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie royale des ſciences de Berlin.

Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres. Année 1781, avec l'Hiſtoire pour la même année.

Quatre Diſſertations qui ont remporté des Prix à cette Académie I.) Sur la force primitive: Prix de 1779. II.) De l'influence des Sciences ſur le gouvernement & réciproquement: Prix adjugé en la même année III.) Sur la queſtion extraordinaire: Eſt-il utile au peuple d'être trompé? adjugé en 1780: & IV.) Sur la queſtion de balliſtique propoſée pour le Prix de 1782.

& de la part de l'Académie électorale des ſciences de Manheim.

Hiſtoria & commentationes Academiae Scientiarum Electoralis Théodoro-Palatinae. Tom. V^us, pars Phyſica.

Le 23 Août. M. le Prof. Lexell a remis de la part de l'Académie royale des ſciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Tom. IV. för År 1783.

Swen Rinman Förſök til Jarnets Hiſtoria 4to År. 1782.

Le

Le 26 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lagus, qui envoie pour le cabinet académique & pour être analyſées chymiquement, diverſes pieces du ſpath-fuſible-phosphorique; (*) ainſi qu'une mine de fer blanc qu'on trouve au fond de la riviere, à 30 verſtes de Tioumen.

—— —— une lettre de M. Lhuilier, datée de Pulawy dans le Palatinat de Lublin le 18 Juillet, qui envoie un mémoire de Mathématiques en manuſcript intitulé: Théoreme ſur les centres de gravité.

Le 2 Septembre. M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. le Conſeiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, un imprimé intitulé: Deſcription des nouveaux Microſcopes, qui contient outre l'annoncé manuſcript préſenté le 8 Avril, divers éclairciſſemens ſur leur conſtruction & leurs avantages principaux.

Le Secrétaire a préſenté le proſpectus d'une nouvelle édition des oeuvres complettes de M. le Comte de Buffon, qui paroitra à Deuxponts.

Le 6 Septembre. M. le Conſeiller de Colleges Pallas a expoſé, le 4e ou dernier Tome des voyages de feu M. Gmelin, qui venoit de quitter la preſſe ſous le titre: *Samuel-Gottlieb Gmelin Reiſe durch Ruſsland zur Unterſuchung der drey Natur-Reiche &c.*

M. le Prof. Lexell a lu la lettre de remercîment de M. Maskelyne, à qui l'Académie avoit envoyé en préſent pluſieurs des ſes ouvrages de Mathématiques, pour la peine qu'il s'étoit donnée à examiner à l'obſervatoire de Greenwich la pen-

(*) Noua Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. à la partie hiſtorique pag. 157.

pendule & le chronomètre de M. Arnold, avant qu'ils furent expediés pour St. Pétersbourg.

Le même 6 Septembre. M. Lexell a préſenté le proſpectus de l'ouvrage de M. Taylor: Table des ſinus & tangentes logarithmiques pour chaque ſeconde du quart-de-cercle, précédée d'une table logarithmique des nombres depuis 1 jusqu'à 100000. L'Académie a ſouſcrit pour deux exemplaires, pour être dépoſés à l'obſervatoire, à l'uſage de Mrs. les Aſtronomes.

—— —— il a préſenté de la part de l'Auteur: *Obſervationes noui Planetae Manhemii culminantis ad quadrantem muralem Birdii 8 pedum. Auctore Carolo König, Aulae Palatinae Aſtronomo.*

Le 9 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Aug. Fréd. Rulffs, commiſſaire royal à Einbeck près de Göttingue: *Ueber die Preiſsfrage der königl. Societät der Wiſſenſchaften zu Göttingen: von der vortheilhafteſten Einrichtung der Werck- und Zuchthäuſer, mit einer Vorrede von Hrn. Prof. Joh. Beckmann.*

—— —— il a lu une lettre, datée de l'Amirauté de Londres le 24 Juin & addreſſée au Préſident de l'Académie Impériale, par M. H. Parker, Secrétaire du Comité des Longitudes, qui annonce que le dit comité vient de deſtiner à l'Académie Impériale, un exemplaire de chaque ouvrage qu'il publie, & qu'il la prie de le faire rétirer du libraire Elmsley, où ces ouvrages ſeront régulierement dépoſés. L'Académie a ſur cela chargé M de Magellan ſon Aſſocié penſionaire à Londres, de recevoir pour elle ces ouvrages du Comité des Longitudes.

Le 13 Sept. Premiere ſéance tenue après le retour de Madame la Princeſſe de Daſchkaw. Le Secrétaire a lu une

lettre adreſſée à Mad. la Princeſſe, par M. Muller, Conſeiller de Conférences à Copenhague, qui envoie de la part de M. König, célébre Phyſicien à Trankebar, un herbier & une collection de plus de 300 éſpeces de ſémences indiennes avec le catalogue, qui ont été remis à M. le Conſeiller de Cour Lepechin, pour le jardin académique.

Le 16 Septembre. Le Secrétaire a remis, de la part de l'Académie Impériale des Beaux-Arts: un Portefeuille avec 64 eſtampes gravées à la dite Académie, que Mad. la Princeſſe de Daſchkaw lui avoit envoyé, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique.

Enſuite de la part des Commiſſaires nommés par le Roi de France pour examiner les myſtères du magnetisme animal: Rapport des Commiſſaires chargés de l'examen du magnétisme animal. Imprimé par ordre du Roi, à Paris en 1784.

Le 23 Septembre. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique: *Le Rifleſſioni ſopra i chirografi di N. S. Papa Pio VI. de' 25 Ottobre & 7 Novembre* 1780 *risguardanti la publica economia di Bologna eſaminate* 1781. *gr. in* 4to.

Le Secrétaire a préſenté de la part du Gymnaſe Illuſtre à Anſpac, les deux derniers Programmes que cet Inſtitut lui avoit adreſſés pour l'Académie.

Le 27 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société électorale de Météorologie à Manheim, le premier volume de ſes collections qu'elle publie ſous le titre: *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae.*

Le

Le 30 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Londres. *Philoſophical Tranſactions of the Royal Society of London Vol. LXXIII. for the Year* 1783. *Part. I. & II.*

& de la part des Auteurs.

Elemens of Mineralogy by Richard Kirwan Eſqr. London 1784. 8vo.

Déſcription of a Glaſs-apparatus for making in a few minutes and a very ſmall expence the beſt mineral waters of Pyrmont, Spa, &c. by J. H. de Magellan. Nouvelle édition.

Tableau de l'état préſent des ſciences & des arts en Angleterre, par Briſſot de Warwille.

Tableau de la ſituation actuelle des anglois dans les Indes orientales & de l'état de l'Inde en général, par le même.

Licée de Londres, ou aſſemblée & correſpondance établies à Londres, par le même.

Annonce des mémoires, voyages & découvertes du Comte de Benyovsky, propoſés par ſouſcription.

Diplomata & ſtatuta regales Societatis Londini pro ſcientia naturali promovenda, iuſſu Praeſidis et Concilii edita.

Le 4 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, pour être dépoſés à la Bibliothéque académique, les

portraits de Sa Majeſté l'Impératrice & de S. A. Impériale Msgr. le Grand Duc Paul-Pétrowitſch, gravés par M. Scorodumof.

Le même 4 Octobre. Le Sr. Voroubief, un des méchaniciens de l'Académie a préſenté & ſousmis à l'examen de Mrs. les Académiciens un eudiomètre de ſa conſtruction. L'Aſſemblée ayant nommé M. le Prof. Krafft pour l'examiner, cet Académicien en a fait ſon rapport, en foi de quoi l'inſtrument a été approuvé.

Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. Nepomuc-Antoine Herrmann, Docteur en Médecine, qui envoie & ſousmet à l'approbation de l'Académie: *Diſſertatio de ſpeculo caulico, cuius focus iuxta datam rectam in omnimodam diſtantiam dirigi & promoueri poteſt. Leopoli* 1784. M. le Prof. Krafft ayant lu cet imprimé, a rapporté dans la ſéance prochaine, qu'il n'y a pu découvrir qu'un amas d'abſurdités.

—— —— il a préſenté de la part de M. le Comte de Saluces à Turin: Lettre de M. le Comte Morozzo à M. Maquer ſur la décompoſition du gaz méphitique & du gaz nitreux.

M. le Prof. Krafft a préſenté des obſervations météorologiques, faites à Boſton depuis le commencement de l'année, dans leſquelles on s'eſt ſervi d'un Thermomètre de Reaumur fait à St. Pétersbourg, par le Sr. Morgan.

Le 18 Octobre. Le Secrétaire a préſenté le Programme des Prix de la Société Zélandoiſe des ſciences, établie a Fleſſingue, pour l'année 1784.

Le

Le 21 Octobre. M. l'Académicien Fuſs a remis la médaille frappée à l'occaſion de l'inauguration de l'Académie Impériale Ruſſe, dont S. A. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, Préſidente de cette Académie, fait préſent à l'Académie des ſciences, pour être placée dans ſon médailler.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. Jean Reinhold Forſter: *Geſchichte der Entdeckungen und Schiffahrten in Norden.*

Le 4 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des ſciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXIV. for the Year* 1784. *Pars I.*

Le 11 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé: *Conſpectus nouiſſimae ac omnium locupletiſſimae Sacrorum Conciliorum editionis*, que l'Imprimeur Antoine Zatta de Venise a publié & qu'il offre à la Bibliotheque académique en échange de quelques ouvrages imprimés à l'Académie. Cette offerte a été acceptée.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 15 Octobre qui communique la découverte de M. Prieſtley, de produire en peu de temps une grande quantité d'air inflammable très pur, en faiſant paſſer la vapeur de l'eau bouillante à travers des rognures de fer ardentes.

Le 15 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque: *Oryctographie de Bruxelles, ou déſcription des foſſiles découverts dans les environs de cette ville, par M. François-Xavier Burtin*; avec 32 planches enluminées. Voyez ci-deſſus le 29 Janvier.

Le même 15 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur, M. le D. Schumlanski: *Diſſertatio inauguralis anatomica de ſtructura renum &c. Argentorati*: dédiée à S. A. Imp. Monſeigneur le Grand-Duc.

—— —— il a lu une lettre d'un Anonyme, qui envoie une annonce de la découverte prétendue du mouvement perpétuel. Cette lettre a été renvoyée à l'auteur, ſous l'adreſſe qu'il avoit indiquée, dans l'eſpérance que l'Académie entreroit avec lui en négociation.

Le 18 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. William Coxe, deux volumes in 4to intitulés: *Travels into Poland, Ruſſia, Sweden and Denmark.*

Le 22 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de l'éditeur, M. Jean Bernoulli, Aſtronome royal à Berlin: *Joh. Heinr. Lamberts deutſcher gelehrter Briefwechſel* 4ter *Band.* Et de la part de l'Auteur M. le D. Jean Hedwig: *Fundamentum Hiſtoriae naturalis muſcorum frondoſorum.* 4to. deux parties avec des figures enluminées.

Le 29 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur, M. Bode Aſtronome de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Berlin: 1.) *Aſtronomiſches Jahrbuch für* 1787. & 2.) *Von dem neuentdeckten Planeten, in* 8vo *Berlin* 1784.

Le 9 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſée au Cabinet académique, une médaille d'or frappée à l'occaſion de l'incorporation de la Crimée à l'empire de Ruſſie.

Le

Le même 9 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Defay, datée d'Orleans le 1 Novembre 1783, qui envoie & ſousmet à l'approbation de l'Académie, un volume in 8vo intitulé: La nature conſidérée dans pluſieurs de ſes opérations, ou mémoires & obſervations ſur diverſes parties de l'hiſtoire naturelle avec la minéralogie de l'Orléanois. M. Ferber ayant été chargé de le lire, il en fit ſon rapport à une des ſéances ſuivantes, où il dit que ce livre a bien le mérite de contenir de bonnes obſervations, mais qu'il ne s'y trouve rien de neuf.

—— —— une lettre de M. le Prof. Stoy datée de Nurnberg le 13 Août, qui ſur ce que l'Académie lui avoit fait notifier, qu'elle n'a reçu que le dernier cahier de ſon ouvrage intitulé *Bilder-Académie*, voyez ci-deſſus au 8 Avril, envoie & préſente un exemplaire complet de tous ſes ouvrages élémentaires.

Le 20 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé deux pieces d'une eſpèce de Granit nommée Murkna, l'une n'ayant qu'une de ſes ſurfaces polie, & l'autre étant taillée en tablette fort mince, dont S. E. fait préſent au Cabinet de Minéralogie académique.

Le 23 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. Stoutz, Capitaine au Service de France, préſentement à Chemnitz en Hongrie, un beau morceau d'un Schoerl rouge & quatre mémoires manuſcripts:

1.) Obſervations métallurgiques ſur le fer.

2.) Gedanken über das Eiſen unter einem phyſiſchen Geſichtspunct, die zufolge der metallurgiſchen Betrachtung dieſes Metals genommen werden konnen.

3.)

3.) Mémoire ſur un objet minéralogique.

4.) Verſuche über die Blutlauge.

L'Académie a chargé Mrs. Ferber & Géorgi d'examiner ces mémoires & d'en faire leur rapport à une des ſéances prochaines.

Le Secrétaire a continué de préſenter tous les mois les obſervations météorologiques, que lui avoient adreſſé & communiqué M. l'Académicien Béguelin à Berlin & M. l'Aſſeſſeur Engel à Moscou.

Lettre

Lettre

de S. E. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à Meſſieurs de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Lu à l'Académie le 8 *Avril.*

Meſſieurs!

Ayant l'honneur d'appartenir à Votre corps, depuis une longue ſuite d'années, je me flatte, que Vous me pardonnerez la liberté que je prends, de Vous adreſſer cette lettre, & que Vous agréerez la marque de la parfaite conſidération pour Vos mérites & Vos lumières, que je m'empreſſe de Vous donner, en ſoûmettant à Votre jugement la déſcription abrégée d'une invention, dont la premiere idée m'eſt venuë, il y a bien du temps, mais que je n'ai perfectionnée, & miſe en execution, que depuis quelques ſemaines. Vous la trouverez dans la ſuivante

Annonce d'un Microſcope achromatique, d'une nouvelle conſtruction, propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur ſurface.

Toute repréſentation d'un objet, produite par des rayons de lumière directs, qui vont droit vers l'oeil, en traverſant l'objet, ou en paſſant à coté de lui, eſt inferieure à tous égards, & conſidérablement moins parfaite, qu'une image produite par des rayons réflechis, c'eſt à dire par des rayons, qui après être tombés ſur la ſurface d'un corps, en ſont renvoyés, &

en rejailliſſent. Les principales cauſes de cette différence ſont les ſuivantes:

1.) Dans le cas, où le corps eſt véritablement opaque, la lumière directe n'en trace & n'en repréſente que ſimplement le contour, & n'en forme rien autre choſe que ce qu'on s'eſt accoutumé de nos jours, d'appeller une peinture en Silhouette.

2.) Si l'objet eſt, ſoit parfaitement, ſoit imparfaitement transparent, ſes parties agiſſent ſur la lumière qui les traverſe, comme des prismes, la décompoſent en couleurs, & rendent la repréſentation très-confuſe. Ce defaut-ci eſt extrêmement remarquable dans le microſcope ſolaire ordinaire.

3.) Des rayons qui traverſent un corps, confondent & entremettent néceſſairement, dans la repréſentation qu'ils en forment, les peintures de la ſurface antérieure, de la ſurface poſtérieure, & de toutes les parties ſituées dans l'intérieur de ce corps, entre ſes deux ſurfaces; ce qui ne peut pas manquer de produire dans pluſieurs rencontres un véritable galimathias. Telle deviendroit p. e. l'image d'un homme, ſi après l'avoir repréſenté en face, on s'aviſoit de le peindre avec des couleurs tranſparentes, dans le même contour, du dos, & d'exprimer de la même maniere, & toujours dans le même contour, les os, les muſcles, les veines, & tous les viſceres & parties intérieures, chacune à ſa place.

4.) La lumière directe ne peut en aucune maniere fournir une repréſentation des différentes élévations & dépreſſions, qui ſe trouvent ſur la ſurface de l'objet. Ce qu'on ap-

appelle le bas-relief ſe perd donc entièrement dans ces ſortes de peintures, tant pour les corps opaques, que pour ceux qui ſont tranſparens; pour les premiers, parceque les rayons directs n'éclairent pas leur coté tourné vers l'oeil; & pour les derniers, parceque des rayons qui traverſent l'objet ne produiſent pas des ombres, de maniere que tout paroit uniforme & plat, & que tout, pour ainſi dire, eſt projetté & réuni dans un ſeul & même plan.

Il ne reſte donc que deux cas, où l'on ait beſoin & où l'on puiſſe tirer parti des rayons directs; celui où l'on veut reconnoitre le contour de l'objet avec beaucoup de préciſion, & celui où il s'agit d'examiner les parties ſituées dans l'intérieur d'un corps. Tout inſtrument optique par conſéquent, qui n'eſt propre à rendre ſervice, qu'avec des rayons directs, ne peut jamais fournir que des repréſentations très-imparfaites. Mais tous les microſcopes dont nous faiſons uſage aujourd'hui, les ſimples auſſi bien que les compoſés, ſe trouvent évidemment dans ce cas, par un défaut eſſentiel de leur conſtruction. Les ouvertures de leurs objectifs ſont toujours fort petites, & ſi ces inſtrumens doivent groſſir un peu conſidérablement, elles deviennent incomparablement plus petites que l'ouverture de la prunelle de l'oeil humain. Les images par conſéquent, que ces verres formeroient, ſi l'on ne vouloit ſe ſervir que de la lumière réflechie, n'auroient qu'une clarté bien inférieure à celle, qu'on appelle la clarté naturelle, & ne ſouffriroient pas dans un microſcope compoſé, une augmentation tant ſoit peu conſidérable, par le moyen des oculaires, ſans devenir faute de lumière tout à fait méconnoiſſables. On ſe trouve donc presque continuellement obligé, d'avoir recours à la lumière directe, comme toujours de beaucoup plus forte, que la lumière réflechie; car cette

lumière directe va ſans s'éparpiller droit vers l'objectif, qui en embraſſe autant, que ſon ouverture peut admettre, au lieu que la lumière réflechie, qui tombe ſur l'objet & en rejaillit, ne ſe rend pas toute vers l'objectif, mais ſe repand de tous côtés par un hémiſphère, de maniere qu'il n'y a qu'une très petite portion de cette lumière, qui parvient à l'objectif.

Cette circonſtance, que les foyers des lentilles objectives dans nos microſcopes modernes ſont extrememement courts, les rend encore par une autre conſidération impropres à pouvoir ſervir avec la lumière réflechie, parcequ'il devient par là néceſſaire d'approcher de fort près l'inſtrument de l'objet, & ordinairement au point, que celui-ci ſe trouve entièrement plongé dans une ombre épaiſſe.

On a crû pouvoir remédier à ce dernier inconvénient, en ajoutant au microſcope un appareil, à l'aide du quel on cherche à renvoyer de la lumière vers l'objet & à l'éclairer, ſoit de coté, ſoit de face.

Ces appareils ſont pour la plûpart du temps abſolument inutiles, parceque quand les microſcopes doivent groſſir un peu conſidérablement, il les faut approcher des objets au point, que la lentille objective les touche presque immédiatement, & en général à cauſe du peu d'eſpace intermédiaire entre l'objet & l'inſtrument, la manipulation de ces appareils n'eſt, & ne peut jamais être, que fort embaraſſante, & l'effet qu'ils produiſent très-imparfait; car pour pouvoir librement & commodement renvoyer la lumière vers l'objet, & pour le pouvoir éclairer par des rayons, qui ayent un degré de force, & une direction convenable, il faut néceſſairement, qu'il reſte un eſpace raiſonnable entre l'inſtrument & l'objet, & que l'un ne ſoit pas trop près de l'autre.

Le

Le même moyen a paru pouvoir auſſi remédier à l'obſcurité originaire, pour ainſi dire, des images que produiſent nos microſcopes, à cauſe de la petiteſſe de l'ouverture de leurs objectifs, en éclairant les objets par une lumière très-forte, même celle du ſoleil, ſoit telle qu'elle nous vient de cet aſtre, ſoit concentrée par le moyen de verres & de miroirs, dans l'intention de compenſer de cette façon le defaut de clarté, auquel ces inſtrumens ſont ſujets. Mais outre, qu'en général cela ne ſe peut executer, que d'une maniere fort incommode & fort imparfaite, comme je viens de le dire plus haut, il s'y joint ſouvent un inconvénient, qu'on n'auroit peut-être pas prévû, ou déviné d'abord. C'eſt qu'aux endroits luiſans & polis des corps qu'on examine (& rarement en trouve-t-on qui en ſoyent exempts,) il ſe forme une image du ſoleil ſi brillante, que quelque petite qu'elle ſoit, elle éblouit l'oeil, & l'empêche de voir diſtinctement le reſte.

Celui donc, qui veut perfectionner les microſcopes, doit renoncer en premier lieu à la lumière directe, & ſe borner à n'employer au lieu d'elle que la lumière réflechie: & en ſecond lieu, il doit également s'abſtenir d'une lumière trop forte & trop brillante, comme ſeroit celle des rayons du ſoleil, & ſe contenter autant qu'il ſe peut de cette lumière douce & modérée, qu'on appelle la lumière du jour: en un mot, il doit tâcher de réſoudre le Problème ſuivant:

„Trouver la conſtruction d'un microſcope, qui produi-
„ſant une augmentation donnée, aye une ouverture de l'ob-
„jectif plus grande que celle de la prunelle de l'oeil humain,
„& dont dans l'uſage, l'objectif reſte éloigné de l'objet à
„une diſtance conſidérable, p. e. de 3, 4, 5 pouces, & même
„d'un demi-pied, ou d'un pied entier.„

Rien de plus facile quant à la théorie, que la ſolution de ce problème. Ce ſont les principes les plus connus & les plus élémentaires de l'optique, qui la fourniſſent ſans difficulté: mais je n'entreprend pas à préſent l'expoſition de cette théorie, parceque je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans aucun détail ſur ce point.

Tous les obſtacles, s'il y en a, ne peuvent donc venir que du coté de la pratique. Il faut que je m'explique un peu plus particulierement ſur cet article.

Un microſcope de ce nouveau genre ne peut qu'avoir une grandeur aſſès conſidérable, & il ne faut pas s'attendre, qu'il puiſſe être d'un volume auſſi petit que nos microſcopes ordinaires. Mais auſſi n'en vois-je pas la néceſſité. Il eſt au contraire manifeſte, que la grandeur dans un microſcope n'eſt pas à beaucoucoup près auſſi embaraſſante, que dans un teleſcope. Il faut pouvoir gouverner aiſément le dernier de ces inſtrumens, pour le pouvoir pointer vers l'objet, au lieu qu'on n'a qu'à fixer & rendre immobile le microſcope, quelle que ſoit ſa grandeur, & faire mouvoir l'objet, pour l'améner à la ſituation convénable. Quiconque a la moindre idée de l'arrangement des machines, trouvera facilement plus d'un moyen, propre à produire cet effet avec aiſance & avec ſureté.

Je ne prétends pourtant pas, que la grandeur d'un microſcope ſoit abſolument indifferente, & qu'il ne puiſſe pas devenir ſi énorme, qu'il ne mériteroit pas d'être mis en execution, ſurtout s'il ne devoit produire qu'un effet médiocre. Un microſcope p. e. de la longueur de 200 ou 300 pieds, qui ne groſſiroit le diamètre des objets, que 10 ou 20 fois, ne vaudroit certainement pas la peine, que ſa conſtruction demanderoit.

Quand

Quand je m'occupai, il-y-a plus de 20 ans, à ſuivre ces idées, je compris au premier abord, qu'avec les lentilles ordinaires, il n'y auroit pas grand choſe à faire dans ce genre, vû que les microſcopes qu'on en pourroit compoſer, ne laiſſeroient pas d'avoir une longueur demeſurée, & ne donneroient pourtant qu'une augmentation modique. J'ai donc tourné mes vûes vers les miroirs, & la théorie auſſi bien que l'expérience m'ont convaincu dès-lors, qu'on pourroit bien parvenir à ſon but par leur moyen. C'étoit à peu près dans le même temps, qu'on avoit fait la découverte des verres achromatiques, qu'on avoit même déja amménés à un degré de perfection conſidérable. Je compris ſans difficulté, qu'ils ſeroient presque encore plus propres à obtenir la perfection des microſcopes que j'avois en vûe, que les miroirs. C'eſt pourquoi dans la queſtion ſur les verres achromatiques, que l'Académie propoſa dans ce temps pour le prix annuel, il fut fait mention expreſſe, à ma requiſition, de l'uſage de cette ſorte de verres pour la perfection des microſcopes. Mais autant que je me le rappelle, les ſçavans qui avoient traité cette matière, s'étoient contentés de recherches générales ſur la nature de ces verres, ſans diſcuter, quel parti on en pourroit tirer, & quel uſage on en pourroit faire, pour perfectionner tel ou tel inſtrument optique en particulier.

Depuis ce temps des travaux d'une autre nature ne m'ont guères permis de m'occuper d'objets de ce genre que pour ainſi dire, à la dérobée, & avec de très-longues interruptions. Je n'ai pourtant jamais perdu entièrement cet objet de vûe, & depuis quelques mois que l'état de ma ſanté m'oblige de m'interdire toute ſorte d'occupations, excepté celles qui peuvent répandre dans l'ame de la ſatisfaction & de la tranquillité, je ſuis allé les chercher dans la contemplation des ou-

ouvrages de l'auteur de la nature, ſource dans laquelle Newton avoit puiſé ce calme parfait, & cette ſérénité admirable d'ame, par laquelle il étoit également ſupérieur à ſon eſpéce, que par ſon génie; & je viens de conſtruire pour un coup d'eſſay, un microſcope de cette nouvelle eſpéce, dont les effets répondent non ſeulement à mon eſpérance & à mes attentes, mais les ſurpaſſent au point, que je puis avancer ſans héſiter, que ce nouveau microſcope, quant à la clarté, la diſtinction, la nétteté, l'élegance, & la beauté ſurprenante des images qu'il produit, auſſi bien que pour la facilité de la manipulation, eſt plus qu'on ne le croiroit ſupérieur, à tout ce qu'on a vû dans ce genre, & aux meilleurs de nos microſcopes modernes.

Ce microſcope groſſit le diamètre des objets 60 à 70 fois. L'ouverture de ſon objectif eſt environ d'un pouce, & ſa diſtance à l'objet de 7 pouces. La longueur enfin de tout l'inſtrument, ſans l'appareil oculaire, eſt d'un peu moins de 3 pieds, méſure angloiſe. Je me borne à en parler maintenant fort en abrégé, en me reſervant néanmoins d'en donner par la ſuite une déſcription plus ſatisfaiſante, qui contiendra tous les détails, qu'on peut déſirer, tant ſur le microſcope que je viens de conſtruire actuellement, que ſur les microſcopes de ce genre en général.

Je ne dois pas manquer ici de faire mention expreſſe du microſcope ſolaire. Rien ne peut empecher, ce ſemble, que le nouveau microſcope dont il eſt queſtion ici, ſi l'on y ajoute un appareil convénable, ne puiſſe auſſi rendre ſervice comme microſcope ſolaire, & il eſt facile à prévoir, que comme tel, il aura un degré de perfection bien ſupérieur à celui du microſcope ſolaire de M. Lieberkühn, dont nous

nous

nous ſervons jusqu'à préſent. Tout le monde connoit les peintures produites par la chambre obſcure, & perſonne n'ignore leur beauté admirable, à laquelle ni l'art ni le pinceau humain ne pourront jamais atteindre. On ſeroit porté de s'imaginer d'abord, que le microſcope ſolaire devroit fournir des peintures auſſi excellentes, mais l'expérience démontre combien elles ſont éloignées de ce degré de perfection. Le microſcope ſolaire achromatique au contraire, ne pourra pas manquer d'égaler parfaitement la chambre obſcure pour la beauté des repréſentations; car ſon uſage ne demande que de la lumière réflechie, & par conſéquent, il doit être complettement exempt de tous les defauts, qui réſultent de la lumière directe, & qui ſont préciſement ceux, qui produiſent les imperfections, aux quelles le microſcope ſolaire ordinaire eſt ſujet.

Si l'invention que je viens Vous communiquer ici, Meſſieurs, obtient Vos ſuffrages, & ſi Vous la jugez propre, à contribuer à l'avancement des ſciences, que Vous cultivez avec tant de ſuccès, je ne doute pas, que Vous ne veuillez bien m'aider de Vos lumières, & concourir avec moi, pour développer la théorie, & pour perfectionner la pratique de ces inſtrumens.

J'ai l'honneur d'être avec la conſidération la plus diſtinguée & la plus parfaite

Meſſieurs!

à St. Pétersbourg,
ce 20 Mars 1784.

Votre très-humble & très-obeïſſant
Serviteur,
Aepinus.

Lettre

de S. E. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à M. le Conſeiller de Collèges Pallas: ſur les Volcans de la Lune.

Lu à l'Académie le 21 Juin 1784.

Monſieur!

Rien aſſurément n'auroit pu me faire plus de plaiſir, que la communication que Vous m'avez faite de la découverte que M. Herſchel vient de faire de l'exiſtence d'un volcan actuellement brulant dans la Lune. Quelque intéreſſante que doit être cette obſervation pour tous ceux qui aiment la Philoſophie naturelle, elle m'intéreſſe comme vous ſavez plus particulierement, & pour ainſi dire plus perſonnellement, en ce que ſi elle ſe confirme pleinement, elle ſert de démonſtration de la vérité de mes conjectures ſur l'origine volcanique des inégalites de la ſurface lunaire, formées l'année 1778, & expoſées dans un mémoire imprimé à Berlin l'an 1781. Ce mémoire eſt écrit, comme vous ſavez, Monſieur, en langue allemande, (*) ce qui eſt ſans doute la cauſe pourquoi il n'eſt gueres connu hors de ce pays, quoique j'en aye fait pavenir une traduction françoiſe en manuſcript à M. le Chevalier Hamilton à Naples, dès le voyage de L. L. A. A. Impériales en Italie, l'an 1782.

Je vois de plus avec beaucoup de plaiſir, que des idées parfaitement analogues aux miennes ſur cet objet, ſont venues

(*) *Schriften der Berliniſchen Geſellſchaft naturforſchender Freunde. IIter Band pag. 1. ſeq.*

venues à M. Beccaria, presque en même temps. Nous voilà donc trois qui ſe ſont rencontrés, car Vous ſavez, Monſieur, que le celébre M. Lichtenberg à Göttingue eſt tombé ſur les mêmes conjectures à peu près à la même époque. Quoiqu' il puiſſe ſembler aſſés ſingulier, que trois hommes ſi éloignés l'un de l'autre ſoient tombés ſur la même idée presque en même temps, la choſe n'eſt pourtant pas ſi étrange qu'elle le paroit. Après les déſcriptions détaillées, & les repréſentations exactes en figures, que pluſieurs ſçavans avoient données depuis une dixaine d'années, de la conſiguration des inégalités terreſtres produites par les éruptions du feu ſouterrain, l'opinion de l'origine volcanique des inégalités de la Lune étoit un fruit parfaitement mur, qui ne pouvoit pas manquer de tomber dans les mains de celui qui s'aviſoit par hazard, de ſécouer l'arbre quelque legérement que ce fut.

Ni M. Beccaria, ni M. Lichtenberg, ni moi, n'avons pourtant pas l'honneur d'être les premiers, qui ayent imaginé cette opinion. Nous y avons été, tous les trois, dévancés, il-y-a plus d'un ſiecle, par un homme dont on lit & connoit peu aujourd'hui les ouvrages; que la nature avoit doué d'un prodigieux talent à imaginer des découvertes, mais dont l'imagination ardente l'entrainoit continuellement vers de nouveaux objets, & l'empêchoit ordinairement de les ſuivre & de les perfectionner. En un môt, c'eſt le fameux Robert Hoocke, dont je parle. Quand je compoſai mon mémoire ſur les inégalités de la ſurface de la Lune, dont je viens de parler plus haut, je recherchai ſoigneuſement, ſi je ne trouverois quelque part une trace, que quelqu'un avant moi ſoit tombé ſur la même opinion. Les peines que je me donnai furent infructueuſes alors, & ce

n'eſt que longtemps après la publication de mon mémoire, que j'ai trouvé par hazard, que l'auteur mentionné avoit eu les mêmes idées, bien longtemps avant moi. À la vérité, cela m'avoit du échaper dans le temps, parceque il n'y avoit pas moyen de s'aviſer, de chercher des choſes de ce genre à l'endroit où je les ai trouvés: car c'eſt ſa *Micrographia*, imprimée à Londres en 1655, chapitre LX, où il propoſe cette opinion, & en parle fort en détail.

Je me fais un vrai plaiſir, Monſieur, de Vous communiquer cette particularité de l'hiſtoire du progrès des connoiſſances humaines, parceque je rens juſtice par là à un homme, que je ſuis tenté de regarder comme le premier génie, quand au talent inventif, qui a jamais exiſté. — — *Redit ad Dominum* — — — & en effet, ſi l'on étoit juſte envers cet homme extraordinaire, il ſe trouveroit qu'il en eſt de même de pluſieurs decouvertes & idées, très remarquables & très ingénieuſes, qui paſſent aujourd'hui pour nouvelles.

Ne ſeroit il pas juſte, Monſieur, d'appeller la nouvelle montagne volcanique, découverte par M. Herſchel, ſi on peut conſtater pleinement le fait, du nom de celui qui a le premier reconnu l'exiſtence des volcans dans la Lune?

J'ai l'honneur d'être, Monſieur, avec une parfaite conſidération.

à St. Pétersbourg,
ce 18 Juin 1784.

Votre très-humble & très-obeïſſant
Serviteur.
Aepinus.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTÉNUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Commentatio de curuis tractoriis.

Auctore *L. Eulero.* p. 3.

Si l'on promène lentement, ſur un plan horizontal, le long d'une ligne droite ou courbe quelconque, l'extrémité d'un fil, à l'autre bout duquel eſt attaché un poids, ce poids décrira auſſi une ligne courbe dont la forme dépend de la nature de la ligne, le long de laquelle le fil a été trainé, & cette courbe a été appellée par les Géomètres *Tractoire* ou *Tractrice.*

Le Problème de déterminer cette courbe paroît proprement appartenir à la Mécanique; mais les Géomètres qui l'ont traité en ont fait une recherche purement géométrique, & leurs ſolutions ſont fondées ſur une ſuppoſition abſolument contraire aux vrais principes du mouvement. Car dans cette idée géométrique on ſuppoſe que le corps ſoit tiré à chaque inſtant ſelon la direction du fil, ce qui arriveroit réellement, ſi le mouvement du poids pouvoit ceſſer & renaître à chaque inſtant, ou bien, ſi à chaque inſtant la direction du mouvement étoit la même. Or comme la direction change continuellement; il eſt clair que le mouvement du poids, déterminé d'après cette ſuppoſition, n'eſt pas dans la nature, à moins qu'on ne faſſe le frottement infini, ou la viteſſe infiniment petite.

Ce-

Cependant feu M. Euler reprend, au commencement de ſon mémoire, le Problème dans le ſens qu'il a dans les écrits des Géomètres qui ont examiné ces courbes; & il commence par le cas le plus ſimple, où la ligne, le long de laquelle on tire le fil, & qu'on pourroit nommer la *Directrice*, eſt droite; cas qui donne déjà une ligne courbe transcendante, l'équation entre ſes ordonnées étant

$$x = a\, l \frac{a + \sqrt{(aa - yy)}}{y} - \sqrt{(aa - yy)}$$

où a marque la longueur du fil.

Il paſſe enſuite à la ſolution générale du Problème, où la directrice eſt une courbe quelconque repréſentée par une équation entre ſes ordonnées t & u; & en mettant les ordonnées de la courbe décrite par le poids, x & y & $\partial y = p\, \partial x$, l'Auteur parvient à ces deux équations:

$$u - x = \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}};$$

$$t - y = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}};$$

d'où il déduit, par la différentiation & par une combinaiſon aſſez ſimple, l'équation $\partial t - p\, \partial u = \frac{a\, \partial p}{\sqrt{(1 + pp)}}$, dont la réſolution donneroit p par t & u, & ayant déterminé p on auroit

$$\partial x = \frac{\partial u + p\, \partial t}{1 + pp} \quad \& \quad \partial y = \frac{p(\partial u + p\, \partial t)}{1 + pp}.$$

Mais comme la réſolution de l'équation

$$\partial t - p\, \partial u = \frac{a\, \partial p}{\sqrt{(1 + pp)}}$$

eſt impoſſible, on ne peut pas aller plus loin dans la ſolution générale du Problème. Cependant il y a une conſidération qui rend ces recherches très-intéreſſantes: c'eſt que, ſi l'on regarde comme connue la courbe que le poids décrit ſur le plan où ſe fait le mouvement (ce que l'on pourra faire avec d'autant

tant plus de droit, qu'on peut la conſtruire mécaniquement par le mouvement tractoire) on pourra réſoudre l'équation mentionnée. C'eſt par ce même moyen que feu M. Euler a conſtruit autrefois l'équation de Riccati & pluſieurs autres de la même forme, dans un mémoire qu'on trouve dans le 8e volume des anciens Commentaires, ſous le titre: *De conſtructione aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inuerſam pertinentibus.*

Rebuté des difficultés du Problème général M. Euler ſe contente d'examiner le cas où la courbe, le long de laquelle on traine le fil, eſt un cercle, ce cas étant du petit nombre de ceux, où la ligne courbe, décrite par le poids attaché au fil, peut être déterminée, ce qui cependant n'eſt pas ſans difficultés. Les détails de cette ſolution ne ſont pas ſuſceptibles d'extrait, & le lecteur curieux de connoître les moyens que l'Auteur met en uſage pour intégrer & pour ſimplifier ſes calculs, ſont à renvoyer au mémoire même. Quant à l'équation pour la courbe décrite, dans ce cas, par le poids, elle eſt de la forme de celles qu'on nomme équations differentielles de Riccati, mais ſa réſolution paroit ſe refuſer à toutes les méthodes connues, quoique la courbe puiſſe être décrite facilement, en traçant la route, parcourue par le poids, lorſqu'on traine l'autre extrémité du fil le long d'un cercle.

Cette recherche eſt ſuivie de quelques réflexions ſur ces mouvemens hypothétiques & contraires aux loix de la Mécanique, & par la détermination du tems néceſſaire à l'extinction du mouvement, produite par le frottement, à compter du moment où l'on ceſſe de tirer le fil, tems qui, en ſuppoſant la viteſſe d'un pied par ſeconde, devient ſeulement $\frac{1}{10}$ ſeconde à peu près. Au reſte pour rendre les courbes décrites de cette

manière plus conformes à celles que préſente le calcul fondé ſur la ſuppoſition que le mouvement ceſſe & renaiſſe alternativement; au lieu d'un mouvement continu M. Euler conſeille de trainer le fil non ſeulement avec beaucoup de lenteur, mais de le faire outre cela par petits intervalles, en interrompant l'action de la main, & la laiſſant repoſer pluſieurs fois le long de la ligne qui en dirige le mouvement.

L'Auteur finit ſon mémoire par un eſſai de traiter le Problème des *Tractoires* comme une queſtion de Mécanique & de chercher la véritable courbe que décrit le poids par un mouvement continu, pour le cas ſeulement, où la directrice eſt une ligne droite. Il y fait entrer, pour cet effet, le tems, la viteſſe, le frottement & la tenſion du fil, en faiſant ſortir, dans la ſuite, la tenſion du calcul, & il parvient à une équation différentielle du ſecond degré, qui, ſi l'on met le frottement nul, donne pour Tractoire une Cycloide inverſe, engendrée par un cercle dont le rayon eſt égal à la longueur du fil; & en ſuppoſant le frottement infini, l'équation devient celle pour la Tractoire vulgaire, ce qui confirme l'aſſertion déjà rapportée au commencement de cet extrait: que la courbe décrite par le poids dans le mouvement tractoire, ne s'accorde avec celle que donnent les recherches géométriques, qu'en faiſant le frottement infini. Quant à l'équation générale, quoique l'Auteur l'ait reduite facilement au premier degré & dégagée de l'irrationalité, il avoue pourtant qu'il ne voit pas comment la réſoudre & qu'il attendroit encore beaucoup moins de ſuccès, ſi l'on trainoit le fil ſelon une ligne courbe, ou ſi le mouvement n'étoit pas uniforme.

II.
De curuis tractoriis compoſitis.

Auctore *L. Eulero.* pag. 28.

Dans ce ſecond mémoire l'Auteur examine le cas, où le fil qu'on traine par une de ſes extrémités ſur un plan horizontal, eſt chargé dans ſa longueur de deux ou pluſiers poids, & il tâche de déterminer les lignes courbes que chacun de ces poids décrira ſur le plan. Mais il obſerve d'abord que ſi l'on vouloit traiter cette queſtion ſelon les principes de Mécanique, (ce qu'on devroit faire proprement) on parviendroit à des équations différentielles du ſecond degré qu'on ne ſauroit réſoudre en aucune manière.

Pour éviter ces difficultés l'Auteur ſuppoſe que les forces ſollicitantes ſoyent proportionelles, pas aux accelérations de chaque poids, mais aux eſpaces qu'ils parcourent pendant un intervalle de tems infiniment-petit, Hypothèſe qui auroit lieu ſi le mouvement pouvoit ceſſer & renaître à chaque inſtant, ou bien, ſi le frottement étoit infini. M. Euler a montré, dans le mémoire précédent, comment il faut qu'on traine le fil, afin que les chemins tracés par les poids s'accordent avec les lignes courbes que fournit le calcul fondé ſur cette Hypothèſe.

Outre cette réſtriction l'Auteur ſe borne encore au cas, où la ligne qui dirige le mouvement de l'extrémité du fil, eſt droite, & il traite le Problème pour deux & pour trois corps; mais l'un & l'autre Problème le conduit à des équations différentielles, du premier degré, à la verité, mais à la réſolution ultérieure desquelles M. Euler renonce. Auſſi tout ce mémoire

n'a pour but que de montrer combien de difficultés peuvent ſe préſenter dans la ſolution de Problèmes qui, au premier coup d'oeil, paroiſſent ſi faciles.

III.

De transformatione ſeriei diuergentis

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \text{etc.}$$

in fractionem continuam.

Auctore *L. Eulero*, pag. 36.

Dans un mémoire intitulé: *De ſeriebus diuergentibus*, qui ſe trouve dans le cinquième volume des nouveaux Commentaires de notre Académie, où feu M. Euler s'étoit occupé ſurtout à trouver la ſomme de la ſérie hypergéométrique de Wallis: $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc., il avoit fait mention de la ſérie beaucoup plus générale expoſée dans le titre du préſent mémoire, & il en avoit aſſigné la valeur en fraction continue, ſans détailler les opérations qui la lui avoit fournie.

M. Euler croit l'avoir déduite alors d'une transformation de l'équation de Riccati & il ſe propoſe de donner ici une méthode plus ſimple; mais il s'eſt trompé apparemment: car en liſant ce qu'il en dit au bas de la pag. 231. du Tome cité des Commentaires, on voit qu'il y a fait uſage d'une méthode peu differente de celle qu'il détaille ici, & dont voici l'eſſentiel.

Il met $mx = a$ & $nx = b$, pour avoir à transformer la ſérie $1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) +$ &c. qui, en

en mettant $a = A$, $a + b = B$, $a + 2b = C$, & ainſi de ſuite, devient $S = 1 - A + AB - ABC +$ &c. d'où il ſuit

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A - AB + ABC - etc.}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A}{P},$$

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b - 2b + 3bC - etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b}{Q}.$$

De là même manière il trouve les valeurs ſuivantes:

$$Q = 1 + \frac{B}{R}; \quad R = 1 + \frac{2b}{S};$$

$$S = 1 + \frac{C}{T}; \quad T = 1 + \frac{3b}{U},$$

& ainſi de ſuite, de façon que

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{A}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{B}{1 + \cfrac{2b}{1 + \&c.}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{a + b}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{a + 2b}{1 + \&c.}}}}}}$$

C'eſt ainſi qu'il faut lire la fraction continue pour S, & non pas comme elle eſt dans le mémoire pag. 40, où les traits qui ſeparent les numerateurs $1 + a + b$, $1 + a + 2b$, &c. des denominateurs, ſont mal placés.

M. Euler regarde avec raiſon de pareilles transformations des ſeries divergentes en fractions continues comme la plus ſûre & peutêtre l'unique voye, de trouver, au moins à peu près, les ſommes de ces ſeries; puiſqu'en reſolvant la fraction continue en fractions ſimples, ces fractions ſont alternativement trop grandes & trop petites, & s'approchent pourtant toujours plus de la véritable valeur.

M. Euler finit ſes recherches ſur cette fraction continue par en reduire le nombre des termes à la moitié, moyennant une méthode bien ſimple, que les amateurs de ces ſortes de recherches ne manqueront pas de lire dans le mémoire même.

L'Auteur s'étoit occupé beaucoup autrefois à découvrir l'Analyſe qui pouvoit avoir conduit le feu Lord Brouncher à la fraction continue connue ſous ſon nom; car il lui avoit toujours paru peu vraiſemblable, qu'elle ait été trouvée par une voye auſſi longue & difficile que l'eſt celle dont Wallis a fait uſage. On trouve la ſommation de cette fraction de Brouncher faite de trois manières différentes dans le ſecond volume des Opuſcules analytiques de feu M. Euler page 149 & 199 & dans les Actes de l'Académie, Année 1779, Partie I, page 15. Et comme au premier des endroits cités l'Auteur avoit transformé la fraction de Brouncher dans la ſérie de Leibnitz $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c., il donne ici la méthode inverſe, à la fin de ce mémoire, & convertit la ſérie de Leibnitz en la fraction de Brouncher; & il lui paroît très-vraiſemblable que ce Mathématicien ait tiré ſa fraction de la même ſource.

IV.

De ſummatione ſerierum in quibus terminorum ſigna alternantur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 46.

Dans le mémoire: *Inuentio ſummae cuiusque ſeriei ex dato termino generali*, qui ſe trouve dans le huitième Tome des anciens Commentaires de notre Académie; dans un autre mémoire du même volume intitulé: *Methodus vniuerſalis ſeries ſum-*

ſummandi ulterius promota, & plus récemment dans ſon Calcul differentiel, Partie Seconde, Chap. V. M. Euler avoit traité ce ſujet à fond; mais il n'a pas été tout-à-fait content du cas où les termes des ſeries ſont affectés alternativement du ſigne poſitif & du ſigne négatif. Dans ce mémoire il expoſe une méthode directe & générale, qui paroît devoir contribuer à perfectionner cette partie de l'Analyſe.

Le premier Problème que l'Auteur traite, c'eſt de trouver la ſomme S de la ſerie $X - X' + X'' - X''' +$ &c., où X eſt une fonction quelconque de x & X', X'', X''', &c. les valeurs de cette fonction qui naiſſent lorſqu'on met $x+1$, $x+2$, $x+3$, &c. à la place de x. Cela poſé il eſt facile à voir, par la nature des différentielles, que la ſomme cherchée ſera

$$S = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha \partial x}{\partial x} + \frac{\beta \partial \partial x}{\partial x^2} + \frac{\gamma \partial^3 x}{\partial x^3} + \text{ \&c.}$$

où tout revient à déterminer d'une manière aiſée les coéfficiens α, β, γ, &c.

Pour cet effet M. Euler conſidère la ſuite

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{ \&c.}$$

en obſervant que, ſi l'on eſt en état d'aſſigner la ſomme s de cette ſérie, on pourra auſſi réciproquement déterminer les coéfficiens α, β, γ, &c. les mêmes qui ſe trouvent dans la ſomme cherchée S.

Cette conſidération le conduit à l'équation $s(1+t^t) = 1$, qu'il transforme en celle ci : $v\,v - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, où

$$v = s - \tfrac{1}{2} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{ \&c.}$$

Mais afin de n'avoir que les puiſſances impaires de t dans la ſerie pour v, il met $v = A t + B t^3 + C t^5 +$ &c. d'où, en ſub-

ſubſtituant à la place de vv & de $\frac{\partial v}{\partial t}$ leurs valeurs, il eſt aiſé de déterminer les coéfficiens A, B, C, &c. & de là les α, γ, ε, &c. Pour mieux marquer la loix de progreſſion de ces coéfficiens l'Auteur introduit les nombres connus ſous le nom de leur Inventeur, Jaques Bernoulli, qu'il déſigne par les lettres a, b, c, &c. De cette façon il obtient pour la ſomme cherchée l'expreſſion ſuivante:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \tfrac{(2^2-1)}{2.3} \cdot \tfrac{a}{2} \cdot \tfrac{\partial X}{\partial x} + \tfrac{(2^4-1)}{2...5} \cdot \tfrac{b}{2} \cdot \tfrac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \tfrac{(2^6-1)}{2...7} \cdot \tfrac{c}{2} \tfrac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \&c.$$

Dans une ſeconde ſolution du même Problème l'Auteur conſidère une fonction T, qui naît de la fonction S, en mettant $x + \frac{1}{2}$ à la place de x, & pour laquelle il trouve

$$T = \tfrac{1}{2}X + \tfrac{\alpha \partial \partial X}{\partial x^2} + \tfrac{\beta \partial^4 X}{\partial x^4} + \tfrac{\gamma \partial^6 X}{\partial x^6} + \&c.$$

& il détermine, les coéfficiens α, β, γ, &c. par une méthode ſemblable à celle de la ſolution précédente, & dont il ſe ſert auſſi dans les deux Problèmes ſuivans contenans la ſommation des ſéries

I. $S = n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \&c.$

II. $S = 1.2.3...xX - 1.2.3..(x+1)X' + 1.2.3..(x+2)X'' - \&c.$

où nous ne nous arrêterons pas, nous bornant à la notice qui a été donnée de la méthode en général dans le ſommaire du premier Problème.

V.

Problematum quorundam ſphaericorum Solutio.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 70.

Les trois Problèmes de Trigonométrie ſphérique dont on trouve la ſolution dans ce mémoire, ſont: De décrire, ſur

ſur une baſe donnée & entre deux grands cercles de la Sphère donnés, un triangle tel que 1°.) l'angle au ſommet devienne le plus grand poſſible; 2°.) que la ſomme des deux côtés qui renferment cet angle devienne la plus petite poſſible & 3°. que la ſurface d'un pareil triangle devienne un Maximum.

La ſolution du Problème premier conduiſant à une équation cubique, l'Auteur examine d'abord les conditions ſous leſquelles le Problème admet trois ſolutions, ce qu'il effectue par la triſection de l'angle, recherche qui eſt accompagnée des calculs pour un cas déterminé, & ſuivie de la conſidération du cas où l'inclinaiſon des deux grands cercles eſt un angle droit, cas qui reduit l'équation cubique à une autre du ſecond degré.

Le ſecond Problème, quoique très facile en apparence, conduit, par la voye ordinaire, à des équations dont la réſolution paroit avoir de grandes difficultés, que l'auteur a ſçu éviter cependant, en faiſant varier le ſommet du triangle d'un arc infiniment petit, ce qui lui fournit une ſolution très-ſimple.

Le troiſième Problème a déjà paru dans le ſecond cahier du Magazin de Mathématique de M. M. Bernoulli & Hindenbourg, Journal très-eſtimé qui ſe publie à Leipzig. Quoique la ſolution en paroiſſe encore plus difficile que celle du précédent Problème, elle ſe prête pourtant à une méthode ſemblable à celle dont l'auteur a fait uſage dans la précédente ſolution, & fournit une expreſſion encore plus élegante & conſtructible geométriquement ſur la Sphère.

VI.

De proiectione Sphaerae in ſuperficiem conicam.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 84.

La différence, qui ſe trouve entre les ſuperficies courbes, ſuivant laquelle il y en a, qui peuvent être développées en un plan, & d'autres incapables d'un tel développement, a porté l'auteur de ce Memoire à cette recherche. Comme on ſait, que la Sphére apartient à la dernière claſſe, le Cone à la premiére, & que la Projection doit être une repréſentation exacte de la Sphére ſur un plan, il paroît une idée naturelle, que de projetter la Sphére ſur un Cone, & enſuite de reduire cette Projection à un plan. Car le Cone & le Cylindre comme des ſuperficies à ſimple courbure ſont, pour ainſi dire, mitoyens entre le plan & les ſuperficies à double courbure, auxquelles apartient la Sphére. Une autre occaſion fut donnée par la Projection inventée par Mr. *de l'Iſle*, dont une conſidération légére montre, qu'elle n'eſt pas proprement Projection à la rigueur, mais qu'elle approche pourtant beaucoup de la Projection de la Sphére ſur un Cone. Mais un peu plus d'attention en fait voir la difference.

Dans la Projection qui eſt l'objet de ce Memoire l'oeil ſe trouve au centre de la Sphére, la table de la Projection eſt la ſuperficie d'un Cone qui touche la Sphére dans ce Paralléle, qui eſt au milieu du pays qu'on veut deſſiner. La Projection d'un point de la Sphére eſt là, où le rayon paſſant par ce point rencontre le Cone. Enſuite la ſuperficie conique eſt développée en un plan. D'où il s'enſuit, que les Meridiens deviennent des lignes droites qui ſe rencontrent au pole,

pole, & les Paralléles des cercles concentriques, dont le pole eſt le centre. La latitude du Paralléle mitoyen étant $= \lambda$, & celle d'un autre Paralléle $= \beta$, le rayon de celui-ci ſera dans la Projection $= \frac{cof.\ \beta}{ſin.\ \lambda.\ cof.\ (\beta - \lambda)}$. Pour avoir l'angle formé par deux Méridiens dans la Projection, il faut multiplier leur angle ſphérique par ſin. λ.

Un des principaux caracteres d'une bonne Projection eſt la reſſemblance des parties infiniment petites dans la Sphére & dans la Projection. Cette condition démande, que dans la Projection les deux cotés d'un rectangle infiniment petit ſoient comme $\partial\beta : \partial\gamma$ cof. β, β étant la latitude, γ la longitude. Mais dans notre Projection ils ſont comme

$$\partial\beta : \partial\gamma \text{ cof. } \beta \text{ cof. } (\beta - \lambda).$$

Là reſſemblance n'exiſte donc que près du Paralléle mitoyen.

Là Projection d'un grand cercle quiconque ſur la ſurface du Cone eſt une ſection conique, ſavoir un angle rectiligne, ou un cercle, ou une parabole, ou une hyperbole, ou enfin une ellipſe, à meſure que la plus grande latitude de ce cercle eſt $= 90°$, ou $= 0$, ou $= 90° - \lambda$, ou $> 90° - \lambda$, ou $< 90° - \lambda$. Le Cone étant développé, les deux ſections premières, c'eſt à dire l'équateur & les Méridiens, ne ſe changent point. Mais les autres ſections changent de nature par ce développément & deviennent des lignes transcendentes. Il n'y a qu'un ſeul cas, où elles ſauroient être exprimées par une équation algebraique ſavoir quand ſin. λ eſt une quantité rationelle; par exemple, λ étant $= 30°$, & la plus grande latitude du cercle $= \alpha$, l'on a cette équation entre deux coordinées rectangles:

$$16\,(x^2+y^2) = 3\,(x^2+y)^2 + 2\,\text{tang.}\,\alpha\sqrt{3}\,(x^4-y^4) + \text{tang.}\,\alpha^2\,(x^2-y)^2.$$

L'axe des abſciſſes paſſe par le vertex de la courbe & par le pole, lequel eſt le point d'où les abſciſſes ſont comptées.

Entre cette Projection & celle de Mr. *de l'Isle* il y a la difference ſuivante: 1. dans la première le pole devient le centre commun de tous les Paralléles: dans la dernière la projection du pole eſt un cercle paralléle. 2. Dans la dernière tous les dégrés de latitude ſont égaux: dans la première ils croiſſent à deux cotés du Paralléle mitoyen en proportion des differences des tangentes. Au reſte ces deux Projections conviennent en cela, que tous les dégrés de longitude pris au même Paralléle ſont égaux, & que l'angle formé par deux Meridiens eſt toujours moindre que leur angle ſphérique.

Quand on veut deſſiner une région circonpolaire, le Cone devient un plan touchant la Sphére au Pole; auſſi dans ce cas notre Projection, la *centrale*, la *ſtéréographique* & celle de Mr. *de l'Isle* conviennent entièrement. Au contraire quand on veut deſſiner une région équatoriale, le Cone devient un Cylindre touchant la Sphére dans l'équateur, & la Projection ſouffre des changemens, que le Memoire détaille.

VII.

De Proiectione Sphaerae ad determinandam aream maxime idonea.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 94.

Parmi les avantages, que nous devons à la Géographie, c'eſt un des plus intereſſans non ſeulement pour le Géometre mais presque pour tout le monde, que de connoitre l'étenduë relative des états. C'eſt pourquoi l'on a imaginé pluſieurs méthodes mecaniques, dont on ſe puiſſe ſervir pour venir à bout de cette recherche, ſans avoir des connoiſſances mathematiques. Ce n'eſt point du calcul, que naiſſent les difficultés: il y a quantité de tables calculées pour abréger cet ouvrage. Mais le ſeul uſage de ces tables eſt, de trouver le rapport entre l'aire d'une Carte & celle de la Sphére: ce qui ſuppoſe qu'on ait deja méſuré l'aire d'un pays dans la Carte; & c'eſt juſtement ce qui rend ce travail fort pénible même au Géometre, puisque dans les Cartes vulgaires ce rapport entre les aires ſe change ſelon les latitudes. Quand on a même ſubdiviſé la Carte d'une préciſion la plus ſcrupuleuſe, on ne ſe peut pas diſpenſer de juger à l'eſtimative des parties exterieures d'un pays: un procédé, qui ſe fonde ſur la ſuppoſition, qu'une aire dans la Carte ſoit toujours proportionelle à celle qui lui répond ſur la ſphére; ſuppoſition abſolument fauſſe. Pour épargner de la peine on a encore plus ſacrifié l'exactitude, en péſant la Carte. Cette méthode, la plus courte que l'on puiſſe imaginer, eſt fondée ſur la même fauſſe ſuppoſition. Ce ſeroit donc une choſe fort utile, qu'une Projection, dont les aires ſont proportionelles aux aires répondantes de la Sphére, c'eſt à dire, où l'aire d'un rectangle infiniment petit eſt $= \partial x \, \partial y \cos. y$, comme dans la Sphére; x étant la longitude,

y la latitude. A cette condition on peut satisfaire par une Projection, où les Méridiens & les Paralléles sont des lignes droites qui s'entrecoupent perpendiculairement, & les latitudes sont prises égales à leurs Sinus. Conformement à cette Projection extrêmement simple, l'auteur de ce Mémoire dressa une Carte de la Russie, mais il trouva d'abord, qu'à une distance considérable à l'equateur les degrés de latitude deviennent si petits, & ceux de longitude si enormes à l'egard des latitudes, que non seulement la figure des pays est entièrement difformée, mais que par une suite naturelle il est presqu' impossible de dessiner & de mésurer les aires d'une exactitude mediocre, parceque de petites fautes ont une influence trés importante. Pour prévenir cet inconvenient, & pour rendre cette Projection utile à plusieurs bûts, les réflexions suivantes peuvent servir. Afin que les aires de la Carte & de la Sphére soyent proportionelles, il n'est pas necessaire que les latitudes deviennent *égales* à leurs Sinus, mais seulement que λ soit $= m$ sin. λ, λ étant la latitude, m un nombre constant quiconque. Ce nombre m peut être determiné pour chaque pays de sorte, que la Projection de ce pays ressemble à sa vraie figure autant qu'il est possible. Quand on nomme la plus grande latitude d'un pays α, la plus petite β, & la mitoyenne μ, ou $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$, le calcul donne $m = \frac{\alpha+\beta}{cos.\,\mu\,(sin.\,\alpha - sin.\,\beta)}$. Par le même nombre il faut diviser l'aire du pays mésurée.

Ce sont les nombres m pour les principaux pays:

pour la Sphére entière - - - - $m = 1,57$.
—— Novaja Zemlia - - - - - - 13, 0.
—— Suède & la Norvègue - - - - 5.
—— Russie - - - - - - - 4.
—— Grande Bretagne & l'Irlande - - - 3.

— Po-

—— Pologne & la Pruſſe - - - - - $2\frac{3}{4}$.
—— Allemagne - - - - - - $2\frac{1}{2}$.
—— France - - - - - - 2.
—— Italie, l'Eſpagne, Portugal, Hongrie & la Turquie Européenne - - - - $1\frac{3}{4}$.

Au reſte le Mémoire contient des régles pratiques pour la méſure d'un pays deſſiné ſelon cette methode, & les aires de *Novaja Zemlia* & de *Kamczatka* trouvées d'après une telle Carte.

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Conſideratio motus plane ſingularis, qui in filo perfecte flexili locum habere poteſt.

Auctore *L. Eulero.* p. 103.

„ Quoique, „dit l'Auteur dans l'introduction de ce Mémoire,“ „ la théorie de l'équilibre auſſi bien que du mouvement pour „ tous les fils tant parfaitement flexibles qu'élaſtiques ſoit ſi „ bien achevée, qu'il ſemble qu'on n'y puiſſe plus rien déſi- „ rer; les formules pour la détermination de ce mouvement „ ont été néanmoins jusqu'à préſent ſans aucun uſage, le mou- „ vement de ces fils n'ayant encore pu être défini dans aucun „ autre cas que dans ceux-là ſeuls, où ces fils ſont ſuſcepti- „ bles d'un mouvement infiniment petit, réciproque ou oſcil- „ latoire: défaut qu'on ne doit au reſte attribuer en aucune „ manière à la théorie méchanique, mais à l'imperfection de „ l'Analyſe ſeule.“ Enſuite M. Euler ajoute, qu'il n'a même pu parvenir encore par aucun artifice a développer le cas le plus ſimple, celui du mouvement d'un fil parfaitement flexible, qui n'eſt ſollicité par aucune force, dans le même plan.

Pour éplucher donc entiérement ces difficultés, l'Auteur conſidère un fil fléxible ſollicité par des forces quelconques à ſe mouvoir dans un plan: il rapporte la figure, que le fil

fil prend après un certain tems t, à deux coordonnées x & y, & en nommant pour cet inſtant ∂s l'élément de la courbe, il ſuppoſe que deux forces $P\,\partial s$ & $Q\,\partial s$, parallèles aux coordonnées, agiſſent ſur lui. Ces forces P & Q pourront dépendre auſſi du tems t, & les coordonnées x & y ſeront des fonctions de s & t.

Ayant établi enſuite les équations primordiales, il parvient, pour le cas même où les forces P & Q ſont $= o$, à une autre équation aſſes ſimple aux différences partielles, qu'il avoüe ne ſavoir comment traiter, & à la réſolution de laquelle il exhorte les Géomètres à appliquer toutes leurs forces. En attendant il communique les efforts qu'il a faits lui-même pour cet objet, & il reduit le problême à la ſolution de cette equation-ci $(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2})^2 + (\frac{\partial\partial v}{\partial s^2})^2 = s$. Mais étant arrêté ici par les trop grandes difficultés, notre Illuſtre Auteur entreprend de traiter ce ſujet dans un ordre contraire, en regardant la figure du fil comme donnée dans chaque inſtant, & en cherchant les forces P & Q propres à produire un tel mouvement.

Il remarque d'abord, que n'y ayant qu'une équation pour cette détermination, l'une des deux quantités P & Q peut être priſe à volonté: après quoi le calcul le conduit à deux équations, qui renferment la détermination des forces accélératrices tangentielles & normales dirigées vers le centre. Mais le Problème général étant indéterminé, il paſſe à la ſolution de quelques Problèmes ſpeciaux. Dans le premier il ſuppoſe les forces normales $= o$, & recherche les forces tangentielles néceſſaires pour produire le mouvement en quéſtion. Il applique la ſolution à un exemple particulier, & détermine les ſymptomes, qui auront lieu pour differens inſtans & pour divers points du fil. Dans le 2. Problème il ſuppoſe au con-

traire les forces tangentielles $= 0$, & recherche les forces normales requiſes pour le mouvement propoſé. Il établit un exemple, & montre, que le Problème reſte encore indéterminé. Dans le 3e. Problème enfin il cherche les forces tangentielles & normales néceſſaires pour le mouvement du fil, enſorte que la tenſion du fil dans tous ſes points ſoit toujours $= 0$.

II.

Enodatio Difficultatis ſuper figura terrae a vi centrifuga oriunda.

Auctore *L. Eulero.* pag. 121.

L'Auteur commence par la remarque de la grande différence, qu'on trouve dans le rapport du diamètre de l'Equateur à l'axe de la Terre, ſuivant que la figure de cette planète eſt déterminée par la combinaiſon de la force de la gravité avec la force centrifuge, ou par la meſure de differens dégrés du Méridien. Ce rapport varie de celui de 578 : 577 à celui de 201 : 200. Il ajoute que quoique Mrs. Hughens & Newton, qui les premiers ſont parvenus par leurs calculs au rapport de 588 : 577, ayent regardé la terre comme uniformément épaiſſe, on trouveroit cependant le même réſultat pour le rapport dont il s'agit, quelque différente qu'on ſuppoſat la ſtructure des parties intérieures de la Terre, auſſi longtems qu'on regarderoit l'action de la gravité comme dirigée vers le centre de la Terre. C'eſt ce que l'Auteur démontre par la Théorie de l'équilibre des fluides; pourvu cependant qu'à diſtances égales du centre la force de la gravité ſoit égale, & qu'on puiſſe regarder comme extrêmement petite la différence entre

entre le Diamètre de l'Equateur & l'axe de la Terre. Il faut donc néceſſairement, continue M. Euler, que chaque particule de la Terre ſoit non ſeulement attirée vers le centre, mais qu'il y ait encore d'autres forces latérales, dont la direction ſoit perpendiculaire à celle vers le centre: & en effet l'hypothèſe de la gravité univerſelle, par laquelle chaque particule eſt attirée vers l'autre, démontrent, que cette ſeconde eſpèce de force exiſte actuellement, & doit être conſidérée dans le calcul. Mais il n'eſt pas poſſible de déterminer ces forces, ſans connoitre auparavant la figure de la Terre & toute ſa ſtructure. Auſſi cette recherche eſt-elle ſi couverte d'obſcurité, qu'on ne doit pas, dit l'Auteur, s'attendre à une explication parfaite, & tout ce que les géomètres ont propoſé juſqu'à préſent ſur ce ſujet, ne repoſe que ſur des hypothèſes précaires, & déſtituées de toute probabilité. Pour traiter donc, autant que poſſible, ce ſujet dans toute ſa généralité, M. Euler conſidère les deux forces perpendiculaires entre elles, dont nous avons parlé, & d'après ce qui eſt probable dans la nature, il fait celle, qui agit vers le centre, proportionelle à une fonction quelconque Z de la diſtance z du centre, & l'autre, latérale, qu'il nomme S, comme dépendante non ſeulement de la diſtance z, mais auſſi de l'angle Φ, que forme le diamètre de l'Equateur avec la ligne tirée de la particule vers le centre; il ajoute, que cette force doit s'évanouïr pour les particules ſituées dans l'axe & dans l'Equateur. D'après cela l'Auteur recherche la figure de la Terre ſelon les principes qu'il a expliqués dans le 13e. Tome des Nouv. Commentaires pour l'équilibre des fluides. Il parvient donc à une équation différentielle, & trouve que pour que l'intégration puiſſe avoir lieu, (ce qui eſt une condition abſolument néceſſaire de l'équilibre,) il faut que la force S ſoit une fonction homogène de -1 dimenſion des coordonnées perpendiculaires x & y, auxquelles

chaque particule eſt réduite. Enſuite après avoir ſubſtitué à ces coordonnées leurs valeurs en z & Φ, il remarque que la condition de l'équilibre demande encore, qu'à diſtances égales du centre la chaleur & la denſité ſoyent les mêmes. En faiſant maintenant la preſſion des particules $= 0$, il trouve l'équation pour la ſurface de la Terre, où cependant l'ignorance, dans laquelle nous ſommes ſur la ſtructure intérieure de ce globe, permet de faire encore pluſieurs ſuppoſitions arbitraires. Pour expliquer donc la choſe par un exemple, l'Auteur fait la force centrale égale à une puiſſance n de z, & la latérale égale à α ſin. Φ coſ. Φ, & après avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'équation, il détermine la conſtante introduite par l'intégration, & le ſurplus du diamètre de l'Equateur ſur l'axe de la Terre; ce qui ſe fait en transportant d'abord la particule quelconque ſous les poles & enſuite ſous l'Equateur. Il ne reſte plus alors qu'à ſubſtituer pour α une fraction qui convienne au rapport trouvé de 201 : 200, & ainſi α devient $= \frac{1}{151}$. Le *Maximum* de la force latérale a lieu pour l'angle $\Phi = 45°$, & devient, à la ſurface de la mer, presque égale à la force centrifuge.

D'un autre coté il eſt manifeſte, que la loi trouvée pour les forces latérales S ne peut pas avoir lieu, parcequ'autrement elles deviendroient infiniment grandes à des diſtances infiniment petites du centre: d'où il s'en ſuit, que ſi la Terre étoit toute fluide, ſa ſurface ne pourroit jamais être tranquille ou en équilibre. Mais comme ſelon toute probabilité l'Ocean n'eſt nulle part aſſés profond, pour que la différence entre la formule trouvée pour S & la vraye loi d'attraction, quelle qu'elle puiſſe être, devienne ſenſible, il ſera inconteſtablement poſſible, que l'Ocean ſe tienne en équilibre, ſi nous faiſons abſtraction de pluſieurs autres cauſes phyſiques, qui peuvent y exciter des agitations.

III.

III.

Sur le Mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible.

Second Mémoire.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 131.

Après avoir conſidéré dans ſon prémier Mémoire le cas le plus ſimple, ſavoir celui, où le mouvement ſe fait ſans friction ſur une table horizontale, l'Auteur traite ici le mouvement gyratoire, qui a lieu dans un plan vertical, où l'on doit donc outre la force centrifuge du corps, & la force reſtringente du fil, introduire dans le calcul la force de la gravité, qui agit continuellement ſur le corps. Un calcul aſſés court mêne M. Bernoulli à une équation aux ſecondes différences, ſi compliquée, qu'il n'y a aucune eſpérance de pouvoir l'intégrer. C'eſt pourquoi il a recours à un moyen indirect pour parvenir à l'équation de la courbe cherchée. Il remarque d'abord, que comme dans le prémier Mémoire la courbe cherchée étoit compoſée d'une infinité d'épicycloïdes toutes égales entre elles, la courbe qu'on cherche actuellement, doit de même avoir une infinité de *parties*, dont chacune ait ſon *maximum* & ſon *minimum*, avec cette difference, qu'ici les *parties* doivent toutes être inégales entre elles. Enſuite les ordonnées ſeront toûjours infiniment petites par rapport aux arcs, qui leur ſervent d'abſciſſes, quoique l'arc, qui fait la baſe de chaque partie, ſoit partout auſſi infiniment petit. La preuve de ces Lemmes ſe trouve déja dans le précédent mémoire, par la conſidération de l'extenſibilité, ſuppoſée infiniment petite du fil, & du tems par cela-même infi-

niment petit, que le corps doit employer pour faire ſes allées & venues. Ceci bien établi, on n'aura plus aucune peine à accorder, qu'on ne puiſſe pour tout le mouvement, qui ſe fait par une de ces parties, regarder comme conſtantes tant la viteſſe gyratoire du corps, que l'action de la gravité, ſuivant qu'elle contribue à augmenter ou à diminuer la tenſion du fil; M. Bernoulli recommence donc le calcul, en ſuppoſant conſtans les élémens dont on vient de parler. Il parvient encore à l'équation d'une épicycloïde infiniment allongée. Mais ce n'eſt encore là que l'équation pour une ſeule *partie* de la courbe, & il s'agit de paſſer à l'équation de la courbe entiére compoſée de toutes ſes parties. Pour effectuer cela il ſubſtitue de nouveau les valeurs variables de la viteſſe gyratoire & de l'action de la gravité dans la direction du fil, au lieu des conſtantes dont il s'étoit ſervi, & ainſi il parvient à l'équation de toute la courbe, qui eſt, comme on devoit s'y attendre, ſi compliquée, qu'on n'en pourroit rien conclure ſur ſa nature que très ſuperficiellement, ſi la méthode indirecte, dont l'Auteur s'eſt ſervi, n'avoit cet avantage ſur une méthode directe, qu'elle nous apprend de toute certitude, que la courbe en quéſtion eſt compoſée d'une infinité d'épicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, qui néanmoins ſont compriſes dans cette équation. L'Auteur recherche enſuite la valeur des plus grandes & des plus petites ordonnées de la courbe pour les différentes régions plus ou moins élevées, dans leſquelles le corps ſe trouve pendant ſon mouvement, de même que l'arc, qui ſert de baſe à chaque épicycloïde; & il trouve, que ces ordonnées auſſi bien que ces arcs ſont les plus petits dans la partie élevée, & deviennent toûjours plus grands, à meſure que le corps approche du point le plus bas de ſon mouvement, & redeviennent plus petits à meſure qu'il s'en éloigne. Il remarque auſſi le rapport des plus grandes

des ordonnées aux baſes des epicycloïdes, & il montre que ce rapport eſt le plus grand & donne les epicloides les plus élargies vers le bas, & les plus applaties vers le haut. Cet applatiſſement peut même aller ſi loin dans la partie la plus haute, que l'epicycloide ſe confond entiérement avec le cercle immobile, qui lui ſert de baſe: cela arrive, quand la viteſſe du corps n'y eſt due qu'à la moitié du rayon, ce qui rend, comme on ſait, la force centrifuge égale à la force centripète, enſorte qu'il n'en peut réſulter aucune extenſion du fil, ſi, (comme on ſuppoſe,) il avoit commencé ſon mouvement par le haut ſans qu'il ait été tendu. Mais la viteſſe indiquée eſt auſſi, comme l'Auteur fait voir, la plus petite, que la nature du problème permette de ſuppoſer au corps, parcequ'autrement le fil ne pourra pas toûjours reſter tendu, ce qui cependant eſt une condition eſſentielle.

Comme la détermination du tems, que le corps employe à décrire un arc quelconque, demande ſeule des calculs aſſés prolixes, l'Auteur a renvoyé cette recherche à la fin du Mémoire; il parvient à une infinité de ſéries infinies, toutes aſſés convergentes, & qui s'evanouiſſent toutes à l'exception d'une ſeule, pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'eſt-à-dire, quand l'arc décrit eſt un multiple quelconque de 90 dégrés. Cette ſérie, qui reſte, ſera plus ou moint convergente, à proportion que la viteſſe initiale du corps ſera plus ou moins grande. La ſomme de cette ſerie étant une fois trouvée par approximation, l'Auteur fait voir la loi de progreſſion, ſuivant laquelle il eſt très facile de déterminer le tems employé à décrire un multiple quelconque du quart de la circonférence, & il finit par l'application à un exemple, qui apprend, que ſi un corps commence à tourner depuis le ſommet de la circonference avec une viteſſe due à la longueur du rayon,

rayon, il faudra que ce rayon ſoit de 2 pieds, 7 pouces de France, pour que le corps achève une révolution dans une ſeconde de tems.

IV.

Eſſay rélatif aux recherches de M. de la Grange ſur l'attraction des Sphéroïdes elliptiques.

Par M. *Krafft*, pag. 148.

Ce mémoire a pour objet de déterminer l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique de revolution exerce ſur un corpuſcule placé dans un endroit quelconque. L'illuſtre de la Grange s'eſt déja occupé de ce probleme dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1773, où après avoir remarqué, que ce probleme eſt du nombre de ceux, auxquels l'Analyſe paroit en quelque façon inſuffiſante & la Syntheſe ſeule capable d'atteindre, il en donne une ſolution analytique, qui ne le cede en rien à la ſolution ſynthetique, que Maclaurin en a donnée & qu'on peut regarder à juſte titre comme un chef-d'oeuvre de Syntheſe. Dans cette nouvelle ſolution M. de la Grange employe un rayon vecteur tiré du corpuſcule attiré à l'élément attirant du Sphéroïde avec deux angles, qui en déterminent la poſition, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on ſe ſert ordinairement dans l'Analyſe des problemes de cette eſpece; & après avoir fait ſentir les difficultés qu'on rencontre en appliquant ce procedé ordinaire au probleme en queſtion, même dans le cas le plus ſimple, où le corps attirant ſeroit une Sphere, il conclut, qu'en s'y prenant par le moyen de trois coordonnées, il ſera presque impoſſible de déterminer l'attraction même d'une Sphere ſur un corpuſcule

puſcule placé dans un endroit quelconque. Ce mémoire de M. de la Grange a engagé notre Académicien de faire quelques recherches ſur les moyens de vaincre les difficultés qu'on rencontre dans les intégrations des différentielles, auxquelles on parvient en traitant ce probleme par le moyen des trois coordonnées orthogonales; & il en a trouvé un, moyenant lequel il a réuſſi à déterminer l'attraction, qu' un Sphéroïde elliptique de révolution exerce ſur un corpuſcule placé dans un point quelconque de l'axe de révolution, ſoit en dedans ſoit au dehors du Sphéroïde, ou ſous l'Équateur à la ſurface du Sphéroïde. Les expreſſions finies, qu'a trouvées M. Krafft pour les attractions dans ces trois cas, s'accordent parfaitement avec celles de M. de la Grange, & doivent être les ſommes des ſeries infinies, que M. Euler a données pour les mêmes attractions.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Réflections ſur l'ancienneté rélative des roches & des couches qui compoſent la croute du globe terreſtre.

Troſieme Section.

Par M. *J. J. Ferber.* Pag. 163.

La Nature n'a pas formé la pâte des montagnes primitives d'une ſubſtance homogène, & n'a pas ſuivi ſcrupuleuſement nos diviſions minéralogiques. Rien n'eſt plus ordinaire au contraire, que de trouver réunies dans la même carriere des eſpèces & des variétés qu'on diſtingue avec raiſon dans les cabinets.

Si l'on examine p. ex. quelque montagne granitique, on y voit ſouvent confondues, non ſeulement toutes les variétés de cette roche, mais encore des rognons ou des maſſes de gneiſs, de ſchiſte ou de porphyre, qui ne ſont, à la vérité, que dans une proportion infiniment petite, en comparaiſon du total de la maſſe. Et ces eſpèces de noeuds ne ſont point des pierres étrangeres, ce ſont des portions de la ſubſtance même du granite; & le tout a été formé par une ſeule & même opération de la nature.

Mais ſi ces petites maſſes de ſchiſte, de gneiſs ou de porphyre ſont contemporaines au granite qui les contient, il ne

ne s'en ſuit nullement, que le porphyre, le gneiſs & le ſchiſte qui forment des roches à part, & des bandes très épaiſſes, toujours adoſſées au granite dans les hautes montagnes, ſoient de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

La même irrégularité accidentelle qui ſe remarque dans le granite, a lieu pareillement dans le ſchiſte & le gneiſs, dans lesquels on trouve quelquefois de petites maſſes de granite ou de porphyre. Et ces anomalies locales peuvent avoir eu la même cauſe; c'eſt à dire que ſi l'on ſuppoſe que le ſchiſte & le gneiſs aient été dans un état de fluïdité & de diſſolution, les terres qui les compoſent, ont pu ſe combiner de maniere à produire ces variations.

Il eſt néanmoins plus probable que le ſchiſte & le gneiſs ſont le réſultat de la décompoſition d'un granite préexiſtant. Et cette décompoſition étant plus ou moins parfaite, il a pu arriver, que les parties les plus groſſieres & les moins altérées ſe ſoient de nouveau agglutinées ſous la forme de porphyre ou de granite, & ſe ſoient trouvées enveloppées par les parties plus ténuës & déja argillifiées, qui ont produit le gneiſs & le ſchiſte.

Quant aux filons granitiques inſérés dans les roches ſchiſteuſes, ils ſont, dit l'Auteur, d'une formation poſtérieure à celle du ſchiſte, & ne ſont que des débris du granite primitif; ſoit que ces débris proviennent d'anciennes roches granitiques alterées par le temps, ſoit qu'ils aient été enlévés & transportés par les eaux, lorsque le granite étoit encore dans l'état de moleſſe; & qui aiant été dépoſés dans les fiſſures des montagnes ſchiſteuſes, s'y ſont agglutinés & cryſtalliſés.

M. Ferber paſſe enſuite à des obſervations ſur les roches calcaires, dont la pâte, dit-il, n'eſt pas plus homogène que celle des montagnes de granite, de gneiſs ou de ſchiſte. L'eau qui la dépoſoit, étoit en même temps chargée de terres argilleuſes, ſilicées &c., quelquefois même en très grande quantité; ce qui confirme la théorie de la formation des marbres & autres roches calcaires, poſtérieurement à celle des granites & des ſchiſtes. Les marbres qui paroiſſent les plus purs ne ſont pas exempts de ces mélanges: il n'eſt pas rare de trouver des cryſtaux de quartz dans le marbre de Carare; & les marbres blancs du Dicentin contiennent de la magnéſie en abondance. Les Cipolini ſont remplis de couches très régulieres de mica, qui vraiſemblablement doivent leur origine à la décompoſition d'un gneiſs ou d'un ſchiſte préexiſtant. L'Auteur rappelle encore nombre d'autres mélanges de matieres hétérogenes qui ſe rencontrent dans les diverſes eſpèces de marbres; & il conclud que cette altération s'eſt faite dans le temps même de la formation de la roche calcaire. Mais on ne ſauroit inférer delà, dit-il, que tout ſable, toute argile, & toute magnéſie qui forme la pâte d'autres montagnes du Globe, ſoit de même date de naiſſance que ces couches calcaires ou de marbre; & c'eſt pourtant ainſi que l'on raiſonne, ajoute-t-il, lorsqu'on veut conclure de quelques maſſes de granite trouvées dans l'intérieur du ſchiſte, que celui ci eſt de la même ancienneté que le granite.

Il y a deux manieres d'enviſager les roches: ou en Phyſicien Géologue, ou ſimplement en Minéralogiſte. Celui-ci ne cherche qu'à déterminer les genres, les eſpèces & les variétés des foſſiles, par leurs ſignes extérieurs, & par le ſecours de la Chymie. Le Géologue voit les choſes en grand; il obſerve la diſpoſition rélative des foſſiles dans le ſein

ſein de la Terre, & cherche à dévoiler la ſtructure même du Globe.

Celui qui ne ſeroit que minéralogiſte, & qui s'imagineroit que les montagnes de granite ou de marbre ſont partout auſſi pûres, auſſi homogenes que les morceaux d'inſtruction raſſemblés dans ſon cabinet, risqueroit de méconnoitre totalement ces roches dans certains endroits des grandes chaines; il ſeroit même tenté de dire peut-être, qu'il n' y a ſur la Terre qu'un petit nombre de montagnes de granite ou de marbre; & il ſeroit hors d'état de déchiffrer l'ordre qui regne dans la diſpoſition des roches.

La dénomination & la claſſification des montagnes, doit donc ſe tirer de l'eſpèce de roche dominante, & non des parties accidentelles qui peuvent s'y rencontrer.

La nature reſte fidèle à ſes principes lorsqu'elle agit en grand: c'eſt à l'obſervateur à les ſaiſir & ne pas croire, qu'elle s'en écarte au premier petit objet, qui lui paroit extraordinaire, parcequ'il ne l'a pas examiné comme il convenoit.

Si des montagnes de granite contiennent de petites maſſes de porphyre, il n' y a rien de ſurprenant: on ſait que le granite renferme ſouvent des veines argilleuſes & bolaires; ſi quelques parties de feldſpath ſe détachent, ſe diſperſent dans ce bol, & qu'il vienne à ſe durcir, voila du porphyre tout formé. Il en eſt de même de celui qui ſe trouve dans les montagnes de gneiſs & de ſchiſte, puisque le gneiſs contient en abondance le feldſpath qui eſt une de ſes parties intégrantes. À l'égard du ſchiſte, comme il eſt formé des debris du granite, ou du gneiſs par un ſeconde deſtruction, il

eſt très poſſible que quelques parties de feldſpath qui ont échappé à la décompoſition, ſe ſoient enclavées dans la maſſe encore boueuſe.

Si l'on prétend expliquer d'une autre maniere la formation de ces montagnes, toujours faudra-t-il convenir que la nature a la faculté de produire du feldſpath, ou toute autre eſpèce de pierre, lorsque les terres convenables & les autres circonſtances néceſſaires ſe trouvent réunies. Or le roches argilleuſes ne ſont nullement dépourvues des élémens du feldſpath; & l'état de fluidité où elles ont été, a favoriſé ſa cryſtalliſation. Il n'y a rien là qui répugne aux loix de la nature, puiſquelle fait journellement ſous nos yeux des opérations parfaitement analogues. Ainſi donc, on peut dire qu'il y a des roches calcaires, des ſchiſtes, & même des granites de différens âges; & c'eſt au géologue à diſtribuer les roches de mêmes genres, eſpèces ou variétés en pluſieurs claſſes d'ancienneté rélative, ſuivant les obſervations & les découvertes qui l'éclairent ſur cet objet.

II.

De ordine fibrarum cordis.

Diſſertatio VI. quae repetitas et nouas obſeruationes de fibris ventriculorum externis continet.

Pars prior. Ventriculus dexter.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 181.

La ſtructure des parties intérieures du corps humain eſt beaucoup plus variable encore, que la figure externe & la phyſiogno-

ſiognomie de l'homme. Et ce n'eſt pas la moindre difficulté de connoitre dans cette ſtructure compliquée, & dans ce chaos de fibres dont particulierement le coeur eſt compoſé, l'eſſentiel, ou le conſtant, & de le diſcerner de ce, qui n'eſt qu'individuel. Par cette raiſon l'Auteur, après avoir donné dans les quatre premieres diſſertations ſur l'ordre des fibres du coeur, inſerées aux Actes de l'Académie, la déſcription des fibres externes des deux ventricules, n'a pas manqué de réiterer ſes obſervations dans pluſieurs autres coeurs; & c'eſt dans cette diſſertation, dont nous livrons ici la premiere partie, qu'il raconte ce qu'il y a ou à corriger, ou à confirmer, dans ſes premieres déſcriptions.

Mais comme auſſi toutes les ſtructures ne ſont pas également bien exprimées dans tous les corps, & qu'il y a dans les divers individus, des ſtructures, ou plus, ou moins parfaites; l'Auteur, en faiſant ces nouvelles recherches, a découvert encore pluſieurs parties, qui dans ſes premiers travaux lui étoient échappées, ſoit qu'elles n'étoient pas aſſés diſtinctement exprimées, ou que tout-à-fait elles ne ſe trouvoient pas dans les coeurs, ſur leſquels il faiſoit ſes premieres recherches; & qu'on voit pourtant aſſés, qu'elles appartiennent eſſentiellement à la ſtructure parfaite. Ainſi il ajoute dans la préſente diſſertation tout ce qu'il a remarqué de nouveau depuis ce temps-là.

Il n'y a eu qu'un ſeul petit muscle, que l'Auteur nommoit *fibrae interiectae*, & une certaine interruption de fibres, ou *raphe*, dans la ſurface ſupérieure du ventricule droit, que l'Auteur avoit pris pour eſſentiels & conſtans, & qui ne ſe ſont pas confirmés. Tout le reſte des muscles, qui compoſent la ſurface externe des deux ventricules, & toutes les autres

tres parties du coeur dénoué de ſes paux, ſe ſont très-bien conſtatées.

Entre les parties obſervées en dernier lieu, la plûs conſidérable ſemble être celle, que l'Auteur nomme *cone artériel.* C'eſt une partie du ventricule droit; mais elle eſt auſſi bien diſtinguée de ce ventricule, que l'artère pulmonaire qui en ſort, l'eſt elle même. Le ventricule eſt attaché par toute ſa ſurface poſtérieure à la cloiſon qui diſtingue les deux ventricules, & qui leur eſt commun. Il n'a par conſéquent point de parois poſtérieur propre; mais au lieu de ce parois il n'y a que cette cloiſon même, qui fait auſſi bien le parois antérieur du ventricule gauche, que le poſtérieur du droit. Or ce cone artériel, ou cette partie du ventricule droit que l'Auteur nomme ainſi, a ſon propre parois poſtérieur, comme l'artère pulmonaire, & eſt ſéparé du ventricule gauche & de la cloiſon auſſi bien que celle-là. On auroit toute raiſon de conſidérer ce cone comme une partie de l'artère pulmonaire plûtot que du ventricule, ſi les valvules ſémilunaires ne le diſtinguoient pas évidemment de l'artère & le réduiſoient au ventricule. De plus le cone eſt pourvû auſſi-bien que le ventricule de belles fibres musculaires, qui manquent à l'artère, & a la même ſtructure comme celui-là. L'Auteur avoit trouvé le cone artériel dans ſes premieres recherches, il l'avoit conſidéré comme une partie toute ſinguliere du ventricule droit, & l'avoit même nommé de ce nom; mais quoique ces cones avoient été pourvûs de leurs propres parois poſtérieurs dans les coeurs, qu'il avoit vû alors, ils avoient été attachés néansmoins par leur coté gauche au bord ſupérieur de la cloiſon; ainſi qu'ils ne pouvoient pas être réflechis comme l'artère pulmonaire. Dans ces dernieres obſervations le cone étoit détaché de la cloiſon & du ventricule gauche par toute ſa ſurface & ne continuoit

tinuoit que par ſa baſe au ventricule droit, tout comme l'artère pulmonaire eſt continuée au cone. On la pouvoit réflechir en même temps avec cette artère, & les fibres musculaires, qui couvrent le cone dans ſa ſurface antérieure, continuoient en entourant le cone, dans ſa ſurface poſtérieure autour du coté gauche auſſi bien qu'autour du coté droit.

Une autre particularité que l'auteur à trouvé dans ce coeur, dont la ſtructure eſt repréſentée par les planches ajoutées à cette diſſertation, & qui pareillement ſemble appartenir à la ſtructure parfaite, eſt la diviſion de l'extrémité du coeur en deux pointes, dont l'une appartient au ventricule droit, & l'autre au gauche; ainſi qu'on ne peut pas dire proprement, que le coeur, c'eſt à dire les deux ventricules enſemble ſoient terminés par une pointe commune; mais bien, que chaque ventricule ſoit pourvû de la ſienne. Il y a trois muscles particuliers au ventricule gauche, que l'auteur appelle *fasciculi terminales*, qui prennant leur origine à la ſurface inférieure du coeur près de l'extrémité du ventricule gauche, vont delà obliquement par le milieu entre les deux extrémités des deux ventricules à la ſurface ſupérieure, & s'y attachent. Si ces muscles ſont forts & bien formés dans un coeur, ils produiſent par leur continuelle action une profonde & aſſés large impreſſion dans ce milieu entre les extrémités des deux ventricules; & par cela même ces extrémités jailliſſent néceſſairement en avant, & forment des pointes différentes. C'eſt donc de la groſſeur & de la bonne exécution de ces muscles, & de la force de leur action, que depend la diviſion de l'extrémité du coeur en deux pointes; & c'eſt par cette raiſon que l'auteur croit pouvoir compter cette diviſion parmi la ſtructure parfaite du coeur; encore que le plus ſouvent on trouve les fascicules terminaux foibles & mal ex-

primés, & par conſéquent auſſi les extrémités des ventricules combinées dans une ſeule pointe obtuſe.

Le reſte de cette premiere partie de la ſixieme diſſertation concerne pour la pluspart une déſcription anatomique très exacte & détaillée des divers muscles, qui couvrent la ſurface externe du ventricule droit. Les remarques, qui regardent les fibres externes du ventricule gauche ſeront expoſées dans la ſeconde partie.

III.

Analyſis chemica aquae fluvii Nevae vrbem Petropolin perfluentis.

Auctore *I. G. Georgi*, pag. 221.

On attribue communement à l'effet de l'eau de la Neva, les incommodités auxquelles les étrangers ſont ſujets d'abord, ou peu de jours après leur arrivée à St. Pétersbourg; dont la pluspart ſe plaignent de la diarrhée: quelques uns s'en reſſentent moins que d'autres, mais il y en a peu qui en demeurent entierement exempts. Feu M. Model ayant analyſé cette eau chymiquement, après y avoir employé toute cette ſcrupuleuſe exactitude qu'on admire dans ſes écrits, il n'y avoit cependant rien trouvé qui puiſſe être cenſé de cauſer ce dérangement de ſanté: le réſultat de ſes recherches ayant été que l'eau de la Neva ne cédoit pour la pureté presque en rien à celle de Briſtol. Mais M. Model avoit fait puiſer ſon eau au haut de la ville & dans une profondeur conſidérable au milieu de la riviere; tandis que la pluspart des habitans ſe ſervent pour leur boiſſon de l'eau de la riviere qui eſt la plus proche de leurs demeures, & qui

ſans

ſans doute doit différer plus ou moins de celle qui eſt au haut de la ville. M. Géorgi a donc cru, que pour décider entierement la queſtion ſur la ſalubrité de l'eau de la Neva & ſur ſon effet prétendu, il faudroit non ſeulement ſe contenter d'avoir examiné l'eau, qui a été puiſée aux endroits, où elle doit naturellement être la plus pure, mais auſſi celle qui mouille les bords, ainſi que celle qui coule par les bras moins conſidérables de la riviere qui traverſent la ville. Il rapporte en conſéquence avoir employé des eaux puiſées en quatre endroits très éloignés entr'eux & très différens par rapport à leur local: il expoſe enſuite ſes expériences & conclud, que l'eau de la Neva eſt en général pure, limpide, legere, ſans ſaveur, & déliée, ſe conſervant longtemps ſans ſe corrompre, & très peu mélée de parties hétérogenes. Mais quelle ſeroit donc la cauſe de l'effet dont presque tous les étrangers ſe plaignent? M. Géorgi ne prétend pas être en cette matiere un juge compétent, il ſoupçonne cependant, que c'eſt un extrait de gluten animal, qui ſe trouve mélé à une matiere végétale & marécageuſe, ſurnageant quoiqu'en très petite quantité à la ſurface de la riviere, qui ſoit contraire à la ſanté des perſonnes qui n'y ſont pas accoutumées. Au reſte notre Académicien communique une analyſe chymique des eaux des puits & des foſſes ſtagnantes, qu'il trouve d'autant plus impure & malſaine.

IV.

Marina varia noua et rariora deſcripta.

Auctore *P. S. Pallas.* Pag. 229.

Ce mémoire donne la déſcription de quinze animaux marins, dont une partie a été envoyée des isles Couriles, & dont quelques autres ſont des productions des mers de l'Europe & des deux Indes.

Le genre des *Nereïdes* ou Millepieds de mer reçoit ici une augmentation de quatre nouvelles eſpeces, & une cinquieme y a été rapprochée par des rapports que les auteurs avoient négligés.

Les autres déſcriptions font connoitre: l'animal du petit *tuyau de mer*, qui ſe trouve attaché ſur les varecs des mers du Nord; un nouveau *limaçon* des isles Couriles; une *étoile de mer*, de la famille de celles qui ſont revétues d'écailles, à rayons extrèmement allongés, de la mer des Antilles; une *tulipe de mer* de forme applatie des isles Couriles; une très-petite *Pholade* qui perce les bois flottans dans la mer du Nord; un *Oſcabrion* ou Patelle articulée, dont les lames ſont revétues d'une groſſe peau chagrinée; une *coquille* de la forme des oreilles de mer, qui eſt presque totalement coriacée & dépourvue de ſubſtance calcaire; trois eſpèces de *Fontaine de mer* (Aſcidia), dont l'une recouverte d'écailles pierreuſes, & une autre de la forme & de la couleur d'une orange, viennent des isles Couriles; la troiſieme a été obſervée ſur les plages de la mer glaciale. Les déſcriptions de toutes ces eſpeces, dont quelques unes ſont accompagnées de détails anatomiques, ne ſont pas ſuſceptibles d'extraits.

V.

Complementa varia Acad. Imperiali Scient. Petropolitanae communicanda ad Clar. ac Celeb. Virum P. S. Pallas.

Auctore *Petr. Camper.* Pag. 250.

M. Camper commence par l'expoſé de la collection nombreuſe qu'il a formée de ſquelettes & de cranes de tous les

les quadrupedes de l'univers qu'il a pû ſe procurer, & d'oſſemens foſſiles dont il s'occupe à rechercher les originaux dans la nature. Il declare qu'il eſt maintenant de l'opinion que pluſieurs eſpeces d'animaux peuvent avoir été détruites par des cataſtrophes arrivées à nôtre globe.

Il parle enſuite en particulier de ces cranes foſſiles de Biſons que M. Pallas a décrits dans le XVIIme tome des nouveaux Commentaires de l'Académie, & les compare à ceux du grand bufle d'Afrique & du boeuf musqué de l'Amérique, qu'il a dans ſa collection. Il panche à conſtater la reſſemblance de ces cranes foſſiles avec la derniere eſpece; reſſemblance que M. Pallas avoit auſſi confirmée lui-même dans ſa déſcription du bufle à queue de cheval, imprimée dans les Actes de l'Académie.

M. Camper compare auſſi les cranes de bufles gigantesques foſſiles, décrites par M. Pallas dans le XIIIme volume des nouveaux Commentaires, dont Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui a fait parvenir un échantillon, avec les plus grands cranes des bufles de l'Aſie qu'il a dans ſon cabinet & il les trouve différens en pluſieurs points & plus reſſemblans au crane de l'Urus, d'avec lequel cependant M. Pallas a très-bien obſervé la différence.

Nôtre celèbre anatomiſte parle enſuite de grands os & dents molaires d'élephants & d'hippopotames, qui lui ont fait naitre l'idée de l'exiſtence d'une race plus forte de ces mêmes animaux dans le monde ancien. Nous remarquerons ici que la plûpart des os & dents d'élephants foſſiles, qui nous viennent de l'intérieur de la Ruſſie & de la Sibérie ſe rapprochent aſſés, par la grandeur, à ceux de la ſquelette

d'un élephant venu de Perſe, que l'Académie conſerve dans ſon cabinet avec un grand nombre de ces os foſſiles, qui ne font pas ſoupçonner une taille gigantesque aux élephants antediluviens.

M. Camper a parfaitement raiſon de declarer les grands bois de cerfs, qu'on a trouvés foſſiles en Irlande, pour avoir appartenu à un animal de ce genre dont l'eſpece vivante n'exiſte plus maintenant ſur la terre, ou du moins n'a pas encore été obſervée.

Il s'attache enfin à éclaircir l'idée que l'on doit ſe faire de ce grand animal inconnu, dont les cranes ont été trouvés ſur l'Ohio, & quelques dents molaires en Europe & même dans l'intérieur de la Ruſſie; animal auquel il applique le nom de Mamout, que les Ruſſes donnent aux oſſemens foſſiles d'élephants. M. Camper prouve bien inconteſtablement, par les deſſins qu'il donne de deux palais entiers de ce grand animal inconnu, que cette eſpece n'a eu aucun rapport avec l'élephant; & que non ſeulement l'emplacement & la forme des molaires & la ſtructure du palais, mais auſſi le defaut d'alvéoles pour les défenſes, qu'on avoit ſuppoſé à cet animal, prouvent ſa différence générique; de ſorte que les défenſes trouvées dans le même endroit ſur l'Ohio n'ont certainement pas appartenu au même animal.

M. Pallas, à qui ce mémoire du célébre anatomiſte eſt addreſſé, y ajoute quelques remarques néceſſaires pour rectifier un petit nombre de faits allégués.

CLASSE

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Obſeruationes aſtronomicae Petropoli in ſpecula academica, anno 1786 habitae.

Auctore *Petro Inochodzow.* Pag. 267.

L'Auteur rapporte d'abord ſon obſervation du paſſage de Mercure par devant le disque du Soleil faite le $\frac{23}{4}$ Avril/Mai: il paſſe enſuite aux immerſions des ſatellites de Jupiter, que le temps lui a permis d'obſerver, & enfin à l'eclipſe du Soleil arrivée le $\frac{4}{15}$ Juin 1787, dont il a très bien vu le commencement & la fin, & pendant laquelle il a encore obſervé les immerſions des tâches dans le Soleil.

II.

De momento coniunctionis Mercurii cum Sole, nec non latitudine illius, tempore tranſitus per discum Solis anno 1786 die $\frac{23}{4}$ April/Mai t. c.

Auctore *Steph. Rumovski.* Pag. 273.

L'Auteur dans ſon mémoire inſeré au 1er Tome de ces nouveaux Actes, avoit ſoumis au calcul les obſervations faites ſur les diſtances des bords du Soleil & de Mercure: il en avoit déduit premierement la plus petite diſtance des centres de ces deux corps céleſtes, ainſi que le moment du milieu

lieu du paſſage, & enfin le moment de la conjonction, qu'il a trouvée pour le méridien de St. Pétersbourg être arrivé à $19^h. 14'. 2''$, ou bien pour le méridien de Paris à $17^h. 22'. 4''$. M. Roumovski eut la ſatisfaction de voir que ce moment s'accorde très parfaitement avec celui que M. Proſperin a déterminé des obſervations faites à Upſala. Mais ayant appris depuis que quelques Aſtronomes, qui n'ont pu obſerver que la ſortie de Mercure, ont donné pour le moment de la conjonction un reſultat différent du ſien, il a cru valoir la peine de refaire les calculs ſur les moments du contact interne obſervés à la ſortie, pour s'aſſurer à laquelle des déterminations on doit ſe fier le plus. Après avoir rapporté quelques obſervations qui ſont parvenües à ſa connoiſſance, M. Roumovski détermine d'abord le demidiametre de Mercure, par le temps qu'il a employé à paſſer par le bord du Soleil, & trouve qu'il doit être contenu entre les limites de $4'', 14$ & $5'', 54$: & prennant un milieu entre les reſultats que lui ont donné diverſes obſervations, il eſtime que ce demidiametre ne ſauroit excéder $4'', 77$. Suppoſant donc le demidiametre du Soleil $15'. 52'', 1$, celui de Mercure $4'', 1$ & calculant les parallaxes de Mercure en longitude & en latitude par les contacts internes obſervés à la ſortie, M. Roumovski trouve pour le moment de la conjonction ſous le méridien de l'endroit où l'obſervation a été faite, une expreſſion dans laquelle il introduit comme inconnües les corrections que peuvent recevoir la différence des demidiametres, & la latitude de la planete: & afin de pouvoir avec quelque certitude porter un jugement de la valeur de ces deux corrections qu'il déſigne par δ & y, il cherche de l'entrée obſervée à St. Pétersbourg une pareille expreſſion, & acquiert par là une équation, qui lui achémine la détermination des valeurs de δ & y. Car quoiqu'une ſeule équation ne ſuffiſe pas à déterminer deux inconnues, la conſidéra-

ſidération que le demidiametre du Soleil tiré des tables eſt fondé ſur les obſervations les plus certaines, & que le demidiametre du Mercure conclu par la durée ne ſauroit ſurpaſſer $4'', 77$; la plus grande valeur qu'en pourra recevoir δ, ſeroit $= -0'', 67$, laquelle étant ſubſtituée dans l'équation ſusmentionnée, on en obtient la correction de la latitude $y = +23'', 5$. Cependant comme le contact interne à l'entrée, obſervé à St. Pétersbourg ne ſauroit être tenu pour exact, les valeurs trouvées pour δ & y ne ſeront qu'approchantes. En ſuppoſant donc la correction de la différence des demidiametres du Soleil & de la planete $-0'', 5$ & celle de la latitude $+23''$, le moment de la conjonction apparente reduit au méridien de Paris pourra, en prennant un milieu, être établi à $17^h. 21'. 45''$. t. v. la correction de la longitude étant $+3'. 15'', 3$.

III.

De tranſitu Mercurii per Solem anno 1786 die $\frac{23}{4}$ Aprilis/Maii Bagdati obſeruato.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 281.

Ce mémoire peut être regardé comme un ſupplement au précédent. M. Roumovski determine de l'obſervation du paſſage de Mercure par devant le disque du Soleil, faite à Bagdat, par une route ſemblable à celle qu'il avoit ſuivie en calculant l'obſervation faite à St. Pétersbourg, le temps de la conjonction apparente du Mercure & du Soleil, ainſi que la latitude de la planete au moment de la conjonction. Et comme le moment du contact intérieur dans l'entrée a été obſervé à Bagdat avec une certitude plus grande qu'à St. Pétersbourg, les concluſions trouvées dans cette ſeconde diſſertation doivent

être censées approcher beaucoup plus de la vérité que celles de la précédente. Ainsi le temps vrai de la conjonction apparente sera maintenant suivant ces dernieres déterminations, pour le méridien de Paris à $17^{h}.\ 22'.\ 4''$. La correction des tables de M. de la Lande pour la longitude $+\ 3'.\ 16'',7$, pour la latitude $+\ 23'',5$; & le demidiametre du Mercure, que M. Roumovski avoit supposé dans son premier mémoire de $4'',6$, sera maintenant très à peu près de $5''$. Au reste nous renvoyons au mémoire même ce que notre Académicien differte sur la dissension qu'on trouve entre les observations de Paris & de Londres & celles des autres endroits.

IV.

Observatio eclipsis Solis anno 1787, die 4 Junii in observatorio Petropolitano habita.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 287.

M. Roumovski rapporte outre les momens du commencement & de la fin de l'eclipse, les observations diverses qu'il a faites pour s'assurer du mouvement de sa pendule: quant aux autres observations faites pendant cette eclipse sur la grandeur des parties obscurcies, notre Auteur se reserve de les communiquer une autre fois, lorsqu'il aura soumis au calcul les momens du commencement & de la fin de l'eclipse.

V.

V.

Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1784. ſuivant le nouveau Stile.

Pag. 288.

I. Eté de 1784.

La Neva debacla le 25 Avril: elle fut repriſe le 6 Décembre: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 225 jours.

Il géla pour la derniere fois le 20 Mai, & il recommença à géler le 30 Sept. ce qui donne un intervalle de 133 jours d'Ete, qui eſt par conſéquent de 20 jours moindre qu'en 1783.

La derniere neige tomba le 7 Juin, & il recommença à en tomber le 28 Sept. ainſi après 113 jours.

La plus grande chaleur a été obſervée le 29 Juillet à 2 heures après midi, de 103 degrés de Délisle; par conſéquent de 3 degrés plus grande qu'en 1783.

La moyenne chaleur deduite de celles qui ont été obſervées à 2 heures après midi, a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $127\frac{2}{15}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $118\frac{4}{5}$ degrés.

La moyenne chaleur tirée des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir a été pour les mêmes intervalles, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $137\frac{1}{15}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $132\frac{1}{2}$ degrés.

La chaleur obſervée à 2 heures après midi, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un nombre de 184 jours, a été en

12 jours plus grande que 110
38 jours entre 120 & 110
47 jours entre 130 & 120
45 jours entre 140 & 130
41 jours entre 150 & 140 &
1 jour entre 160 & 150 degrés: ou bien 1 jour de gélée continuelle.

La chaleur obſervée aux heures du matin & du ſoir, pendant ces mêmes 6 mois, ou 184 jours, s'eſt trouvée en

19 jours moindre que 150: c'eſt à dire qu'il a gélé en 19 jours; en
65 jours entre 140 & 150
53 jours entre 130 & 140
42 jours entre 120 & 130 &
5 jours entre 110 & 120.

D'où nous concluons que l'Eté de 1784 a moins duré que celui de l'année 1783, que les nuits y ont été plus froides, mais que les chaleurs des après-midi ont été plus fortes.

Le Baromètre a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre

au plus haut: 28. 63, le 4 Octobre à 6 heures du matin. Therm. 146, ciel couvert, vent du NOu. médiocrement fort.

au

au plus bas: 27. 38, le 17 Mai à 8 heures du ſoir. Therm. 146, ciel couvert, vent fort du NOu, pluie. D'où

la variation totale 1. 25 &

le milieu - 28. 005.

Enfin la hauteur moyenne 28. 043: ou bien $28\frac{43}{1000}$ pouces de Paris.

Au reſte la hauteur du Baromètre a été pendant ces mêmes ſix mois ou 184 jours d'Été, 125 jours 3 heures au deſſus de 27. 90, 97 jours 21 heures au deſſus de 28. 00, & 69 jours 15 heures au deſſus de 28. 10 pouces.

Les vents forts ont ſoufflé depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre:

1 jour du Nord, le 3 Mai.

8 jours du NE. le 1. 27. 28. 29. 30 Mai, le 27. 28 Août & le 16 Septembre.

3 jours du SE. le 18. 24 Juillet & le 24 Septembre.

4 jours du Sud, le 16 Juillet & le 14. 24. 30 Août.

6 jours du SOu. le 19 Juillet, le 1. 8. 23. 31 Août & le 7 Octobre.

29 jours de l'Oueſt, le 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, le 3. 4. 28 Juin, le 1. 7. 20 Juillet, le 2. 3. 4. 5. 15. 22. 29 Août, le 1. 9. 18. 25. 26 Septembre & le 10. 15. 16. 17 Octobre.

Parmi leſquels les vents du 8. 23. 25 Mai, du 1 Août, & du 9. 25. 26 Septembre, ont été les plus violens. Cet

Eté fut par conſéquent moins venteux que le précédent, mais le vent dominant fut encore celui de l'Oueſt.

Enfin il y eut depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre
42 jours de ciel entierement ſerein,
142 jours de ciel entierement couvert,
11 jours de brouillard,
31 jours de pluie copieuſe & 53 jours de pluie médiocre, en tout 84 jours de pluie,
9 jours de neige, & 3 jours de grêle,
7 orages complets, 5 jours où il n'a fait que tonner, & 3 aurores boreales peu conſidérables.

II. Hyver de 1784 à 1785.

La Neva ayant été priſe le 6 Décembre 1784, elle reſta dans cet état de congélation pendant 148 jours, jusqu'au 2 Mai 1785; où elle debacla dans la nuit au 3me, par une temperature de 146 à 155 degrés. Barom. 27. 65, ciel à demi-couvert, neige & vent du NOu. médiocrement fort.

L'intervalle entre la premiere gélée du 30 Septembre 1784 & la derniere du 11 Mai 1785, eſt de 233 jours; c'eſt à dire de 4 jours moindre que dans l'hyver précédent. La premiere neige étant tombée le 28 Septembre, il neigea pour la derniere fois le 10 Mai, & l'intervalle entre ces deux extrêmes eſt de 234 jours.

Le plus grand froid a été obſervé le 3 Mars 1785 de grand matin, de 200 degrés après la graduation de Délisle. Baromètre 28, 32, ciel ſerein, vent du SOu. peu ſenſible.

Le

Le froid moyen deduit des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir, a été trouvé pour les intervalles :

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - 163,$\frac{4}{5}$
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - 168,$\frac{1}{2}$ degrés.

Le froid moyen entre ceux qui ont été obſervés à 2 heures après midi, a été pour les mêmes intervalles

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - 155$\frac{1}{2}$
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - 159$\frac{2}{3}$ degrés.

Le froid de la nuit, ou plustôt celui des heures du matin & du ſoir, fut depuis le 1 Novembre 1784, jusqu'au 1 Mai 1785, ce qui comprend un intervalle de 181 jours d'hyver:

6 jours plus grand que 190
17 jours entre 180 & 190
24 jours entre 170 & 180
55 jours entre 160 & 170
67 jours entre 150 & 160 &
12 jours moindre que 150 degrés: c'eſt à dire, qu'il y avoit 12 jours de degel continuel.

Le froid des après midi, obſervé à 2 heures, fut pendant ce même intervalle

6 jours moindre que 140
58 jours entre 150 & 140
67 jours entre 160 & 150
36 jours entre 170 & 160

8 jours

8 jours entre 180 & 170
6 jours plus grand que 180 degrés.

Il a donc degélé en 64 après midi.

Le Baromètre a été pendant ces 6 mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785:

au plus haut: 28. 87, le 12 Février à 1 heure après midi. Therm. 174, ciel ſerein, calme.

au plus bas: 26. 78, le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151, ciel demi-couvert, vent fort du SOu. Donc

la variation totale 2, 09 pouces, &
le milieu 27. 825.

Enſuite la hauteur moyenne, 28. 012, ou 28 $\frac{12}{1000}$ pouces de Paris.

Enfin ſa hauteur a été pendant ces mêmes 6 mois, ou 181 jours d'hyver, 114 jours 18 heures plus grande que 27. 90, 91 jours 12 heures plus grande que 28. 00 & 69 jours plus grande que 28. 10 pouces.

Les vents forts ont ſoufflé depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai 1785:

3 jours du Nord, le 25. 27 Février, & le 1 Avril 1785.
1 jour du NE, le 26 Février 1785.
4 jours de l'Eſt, le 22 Nov. 1784, le 6. 7 Janv. & le 20 Févr. 1785.
4 jours du SE, le 10 Déc. 1784, le 8. 21 Févr. & le 27 Mars 1785.

9 jours

9 jours du Sud, le 12 Nov. & le 21 Déc. 1784, le 29 30 Janv. le 5. 7. 22. 28 Févr. & le 20 Mars 1785.

18 jours du SOu, le 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Déc. 1784; le 10. 11. 18. 23. 24. 25 Janv. le 12 Mars & le 13. 24 Avril 1785.

9 jours de l'Oueſt, le 2 Déc. 1784, le 9. 20. 28 Janv. le 9. 17. 25 Mars & le 26. 27 Avril 1785.

2 jours du NOu. le 1 Mars & le 5 Avril 1785.

Entre ces 50 jours venteux ſe ſont trouvés être les plus violens, ceux du 12. 18. 19 Nov. du 3 Décembre, du 10. 18. 24 Janv. du 25. 26. 28 Février, du 1 Mars & du 1 Avril. Cet hyver a donc été conſidérablement plus venteux que le précédent, & le vent dominant a été celui du SOu.

Enfin depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785, ont été annotés:

34 jours de ciel entierement ſerein,

75 jours de ciel entierement couvert,

25 jours de brouillard,

6 jours de neige copieuſe, & 61 jours de neige médiocre: en tout 67 jours de neige,

2 jours de pluie copieuſe, & 21 jours de pluie médiocre: en tout 23 jours de pluie.

5 Aurores boréales, en Janvier, Mars & Avril, dont celles du 29 Janvier, 6 Mars & 7 Avril ont été les plus ſplendides.

Un globe de feu vu le 5 Novembre à 7 heures du ſoir vers SE. d'une lumiere fort vive, & qui éclata avec un grand éclair.

Le 18. 19 Avril des parhélies d'une grande beauté avec des couleurs d'Iris: dont le premier eſt repréſenté ſur la Planche ci-jointe.

Un pareil phénomène a auſſi été obſervé le 19 Février à Moscou, ainſi qu'en diverſes autres villes de la Ruſſie.

MATHEMATICA.

COMMENTATIO
DE
CVRVIS TRACTORIIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 19. Iun. 1775.

§. 1.

Quae olim a Geometris de curuis tractoriis ſunt inueſtigata, quanquam ad doctrinam motus pertinere videntur, tamen nullo modo ad Mechanicam referri poſſunt: eiusmodi enim hypotheſi innituntur, quae veris principiis motus manifeſto refragatur. Nihilo vero minus, admiſſa iſta hypotheſi, ſi res tantum geometrice conſideretur, quae ſuper hoc argumento ſunt inuenta omni attentione digna ſunt putanda, atque adeo ab experientia vix aberrare ſolent. Quamobrem haud inutile fore arbitror, totum hoc negotium accuratius perſcrutari et ſecundum vera motus principia diiudicare.

§. 2. Conſiderari autem ſolet via, quam corpuſculum ſuper plano horizontali deſcribit, dum ope fili ſecundum lineam ſiue rectam ſiue curuam protrahitur; atque haec quaeſtio ita ad Geometriam reuocari ſolet, vt curua deſcripta perpetuo a directione fili tangatur, atque adeo omnes tangentes iſtius curuae deſcriptae vsque ad lineam, iuxta quam

filum protrahitur, productae, vbique eiusdem sint longitudinis. Vt autem talis motus eueniat, auctores probe monuerunt, planum, super quo iste motus producitur, neutiquam politum, sed satis esse debere asperum; tum vero etiam necesse esse, vt filum lente promoueatur, quandoquidem, nisi hae conditiones obseruentur, curua descripta plurimum a calculo esset discrepatura.

Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Ita si corpusculo C alligatum sit filum $CA = a$, cuius terminus A iuxta lineam rectam AB protrahitur, corpusculum in linea quadam curua CY promouebitur, cuius tangentes YT e singulis punctis ad rectam AB productae vbique longitudini fili a aequentur; vnde si pro puncto Y vocetur abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, elementum vero curuae $Yy = \partial s$, erit $-\partial y : \partial s = y : a$, ideoque $y\,\partial s = -a\,\partial y$ et $\partial s = -\frac{a\,\partial y}{y}$, vnde integrando statim colligitur arcus curuae $Cy = s = -a\,ly + C$. Quare si initio filum CA ad rectam AB fuerit normale, tum erat $y = a$ et $s = 0$, ex quo colligitur $s = a\,l\frac{a}{y}$. Vt autem aequatio inter coordinatas eruatur, loco ∂s scribatur eius valor $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, et sumtis quadratis erit $yy\,\partial x^2 + yy\,\partial y^2 = aa\,\partial y^2$, vnde deducitur $\partial x = -\frac{\partial y \sqrt{(aa - yy)}}{y}$, pro cuius integratione faciamus $\sqrt{(aa - yy)} = v$, eritque $yy = aa - vv$, hinc $\frac{\partial y}{y} = -\frac{v\,\partial v}{aa - vv}$, ergo

$$\partial x = \frac{v\,v\,\partial v}{a\,a - v\,v} = -\partial v + \frac{a\,a\,\partial v}{a\,a - v\,v},$$

consequenter

$$x = C - v + \tfrac{1}{2}a\,l\frac{a+v}{a-v} = C - \sqrt{(aa - yy)} + \tfrac{1}{2}a\,l\frac{a + \sqrt{(aa - yy)}}{a - \sqrt{(aa - yy)}},$$

et quia casu $x = 0$ fieri debet $y = a$, fiet

$$x = \tfrac{1}{2}a\,l\frac{a + \sqrt{(aa - yy)}}{a - \sqrt{(aa - yy)}} - \sqrt{(aa - yy)}, \text{ siue}$$

$$x = a\,l\frac{a + \sqrt{(aa - yy)}}{y} - \sqrt{(aa - yy)}.$$

Vnde

Vnde patet, corpuſculum non ante ad rectam AB peruenire quam percurſo ſpatio infinito.

§. 4. Conſideremus nunc quoque caſum, quo filum iuxta lineam curuam quamcunque A T protrahitur. Ita ſi Y ſit punctum in Tractoria, eiusque tangens vsque ad curuam datam in T ducatur, recta Y T perpetuo aequetur longitudini fili $= a$. Referatur curua data ad axem A B, ad quem ex T demittatur perpendiculum T U, ſitque A U $= u$ et U T $= t$, atque ob curuam datam dabitur aequatio inter t et u. Nunc vero ex puncto Tractoriae Y ad eundem axem ducatur normalis Y X, ſitque A X $= x$ et X Y $= y$ et arcus Tractoriae $= s$. Hinc cum Y T curuam tangat, ducta ex T axi normali T S, ob Y T $= a$, erit $\partial s : \partial x = a :$ T S et $\partial s : -\partial y = a :$ Y S, vnde fit T S $= (u - x) = \frac{a\,\partial x}{\partial s}$ et S Y $= y - t = -\frac{a\,\partial y}{\partial s}$. Ponamus nunc $\partial y = p\,\partial x$, erit $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + p\,p)}$, hincque fiet $u - x = \frac{a}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$ et $t - y = \frac{a\,p}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$. Ex his igitur formulis, ſi curua tractoria eſſet cognita, facile determinaretur curua A T, iuxta quam filum produci debet. Tab. I. Fig. 2.

§. 5. Vt autem ex data aequatione inter t et u inueſtigemus aequationem inter x et y, calculus ita inſtituatur. Ex binis formulis inuentis: $u = x + \frac{a}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$ et $t = y + \frac{a\,p}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$, habebimus differentiando

$$\text{I. } \partial u = \partial x - \frac{a\,p\,\partial p}{(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}} \text{ et II. } \partial t = p\,\partial x + \frac{a\,\partial p}{(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde II $-$ I $\times p$ praebet $\partial t - p\,\partial u = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$, ex qua, conceſſa aequationum differentialium reſolutione, quantitas variabilis p definietur per coordinatas datas t et u; ita vt t ſpectari poſſit tanquam certa functio ipſius u, quia t per u dari aſſumitur.

Porro haec combinatio: I. $+$ II. p dat $\partial u + p\partial t = \partial x(1+pp)$, vnde colligimus $\partial x = \frac{\partial u + p\partial t}{1+pp}$, hincque porro $\partial y = \frac{p(\partial u + p\partial t)}{1+pp}$, ſicque etiam x et y per eandem variabilem u determinabuntur.

§. 6. Hic quidem aſſumere ſumus coacti, reſolutionem aequationis differentialis $\frac{a\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} + p\partial u = \partial t$ eſſe in poteſtate, quod tamen pauciſſimis tantum caſibus exſequi licet. Viciſſim igitur, ſi curuam tractoriam tanquam iam cognitam ſpectemus, quandoquidem eius deſcriptio mechanica datur, ipſam hanc aequationem differentialem reſoluere licebit. Atque adeo iam olim hoc modo conſtructionem aequationis *Riccatianae* exhibui.

§. 7. Vt hanc aequationem ab irrationalitate liberemus, faciamus $p = \frac{zz-1}{2z}$, vt fiat $\frac{\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial z}{z}$, et noſtra aequatio differentialis erit $\frac{a\partial z}{z} + \frac{(zz-1)\partial u}{2z} = \partial t$, ſiue

$$a\partial z + \tfrac{1}{2}(zz-1)\partial u = z\partial t,$$

quam ergo ſemper per motum tractorium conſtruere licet, qualiscunque functio quantitas t fuerit ipſius u. Inuento valore literae z erit

$$x = \int \frac{4zz\partial u + 2z(zz-1)\partial t}{(1+zz)^2} \text{ et}$$

$$y = \int \frac{(2z\partial u + (zz-1)\partial t)(zz-1)}{(1+zz)^2}.$$

Euidens autem eſt, in hac aequatione formulam illam *Riccatianam* latiſſimo ſenſu acceptam contineri. Si enim ſtatuamus $z = e^{\frac{t}{a}}$, erit $\partial z = e^{\frac{t}{a}}\partial v + e^{\frac{t}{a}}\frac{v\partial t}{a}$, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$a e^{\frac{t}{a}}\partial v + \tfrac{1}{2} e^{\frac{2t}{a}} v v \partial u = \tfrac{1}{2}\partial u, \text{ ſiue}$$

$$a\partial v + \tfrac{1}{2} e^{\frac{t}{a}} v v \partial u = \tfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{a}}\partial u,$$

vnde

vnde cum $e^{\frac{f}{a}}$ ſemper ſit certa functio ipſius u, quae ponatur $= U$, conſtrui poterit haec aequatio differentialis:

$$a\,\partial v + \tfrac{1}{2} v v U \partial u = \frac{\frac{1}{2}\partial u}{U}.$$

§. 8. Hanc igitur ob cauſſam ſi curua, iuxta quam filum protrahitur, pro lubitu accipiatur, determinatio Tractoriae plerumque vires Analyſeos ſuperat. At ſi filum iuxta peripheriam circuli protrahatur, cuius centrum ſit in C, et radius $AC = c$, ſingulari fortuna euenit, vt Tractoria definiri poſſit. Inceperit enim iſte motus, dum corpuſculum erat in B et filum $BA = a$ ad circulum erat normale; nunc autem corpuſculum peruenerit in Z, vbi recta tangens ZT circulo in T occurrat, ita vt ſit $ZT = a$. Iam ducta recta CZ vocetur angulus $ACZ = \omega$ et $CZ = z$, ita vt pro Tractoria inuenienda ſit aequatio inter rectam z et angulum ω, quae quidem inueſtigatio, niſi artificium adhibeatur, in calculos non parum moleſtos induceret. Tab. I. Fig. 3.

§. 9. Ad has difficultates euitandas in calculum introducamus angulum $CZT = \Phi$; ſic enim conſideratio trianguli CZT, cuius latera ſunt $CZ = z$, $ZT = a$ et $CT = c$, ſtatim praebet $cc = aa + zz - 2az\cos.\Phi$, vnde deducitur $z = a\cos.\Phi \pm \sqrt{(cc - aa\sin.\Phi^2)}$, vbi ſignum ambiguum ad ſitum puncti z reſpicit, prouti id fuerit vel extra circulum vel intra circulum. Quia autem in figura punctum z extra circulum ſitum repraeſentatur, valebit ſignum ſuperius, eritque $z = a\cos.\Phi + \sqrt{(cc - aa\sin.\Phi^2)}$. Praeterea hinc ſimul innoteſcunt anguli ZCT et ZTC; erit enim $\sin.ZCT = \frac{a\sin.\Phi}{c}$ et $\sin.ZTC = \frac{z\sin.\Phi}{c}$. Nunc quia recta ZT eſt tangens Tractoriae in Z, ducatur recta proxima $Cz = z + \partial z$, et ex Z deſcripto arculo zs, in triangulo Zzs erit

Z s

$Z\,s = -\partial z$, et ob angulum $Z\,c\,z = \partial\omega$ erit $z\,s = z\,\partial\omega$, vnde ſtatim colligitur tang. $s\,Z\,z$, hoc eſt tang. $\Phi = \frac{z\,\partial\omega}{-\partial z}$, hincque porro $\frac{\partial z}{z} = -\frac{\partial\omega}{tang.\,\Phi}$, ſiue $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}\,tang.\,\Phi$, ſicque angulus ω per z et Φ definitur. Iam vero relationem inter z et Φ inuenimus. Praeterea vero cum ipſum Tractoriae elementum $Z\,z$, quod vocemus $= \partial s$, ſit $\partial s = -\frac{\partial z}{cof.\,\Phi}$, hinc longitudo Tractoriae concluditur $B\,Z = s = -\int\frac{\partial z}{cof.\,\Phi}$.

§. 10. Cum igitur inuenerimus

$z = a\,cof.\,\Phi + \sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}$, erit

$$\partial z = -a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi - \frac{a\,a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,cof.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2}} - \frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,(\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)} + a\,cos.\,\Phi)}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}},$$

quae manifeſto reducitur ad hanc formam $\frac{-a\,z\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}}$, ita vt ſit $\frac{\partial z}{z} = -\frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}}$. Quamobrem angulus ω ita determinabitur, vt ſit $\partial\omega = \frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}}$; tum vero erit etiam

$$\partial s = \frac{a\,z\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}} = \frac{a\,a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}} + a\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi,$$

vnde integrando prodit

$$s = -a\,l\,cof.\,\Phi + a\,a\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}}.$$

§. 11. Totum ergo negotium reducitur ad has formulas integrales; $\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2}}$ et $\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}}$. Quod ad priorem attinet, quia $-\partial\Phi\,sin.\,\Phi$ eſt differentiale ipſius $cof.\,\Phi$, ponamus $cof.\,\Phi = v$, et haec formula transformabitur in hanc:

$$\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,sin.\,\Phi^2)}} = -\int\frac{\partial v}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,(1 - v\,v))}},$$

cuius integrale eſt

$$-\tfrac{1}{a}\,l\left(\frac{a\,v + \sqrt{(b\,b + a\,a\,v\,v)}}{b}\right) = -\tfrac{1}{a}\,l\,\frac{a\,v + \sqrt{(c\,c - a\,a + a\,a\,v\,v)}}{\sqrt{(c\,c - a\,a)}},$$

vnde

vnde reſtituto valore cof. Φ loco v reperietur tandem

$$s = C - a\,l\,\text{cof.}\,\Phi - a\,l\,[a\,\text{cof.}\,\Phi + \sqrt{(c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}].$$

Vbi ad conſtantem definiendam notetur, initio fuiſſe tam $s = 0$ quam $\Phi = 0$: erit igitur $C = a\,l\,(a+c)$, hinc fit

$$s = a\,l\,\frac{a+c}{\text{cof.}\,\Phi\,(a\,\text{cof.}\,\Phi + \sqrt{(c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2)})},$$

vnde patet, rectificationem huius Tractoriae per ſolos logarithmos expediri.

§. 12. Praecipuum autem negotium verſatur in integratione formulae $\omega = a\int \frac{\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{tang.}\,\Phi}{\sqrt{(c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}$, quae commodiſſime tractabitur ſi ſtatuamus $\sqrt{(c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2)} = x\,\text{ſin.}\,\Phi$, vt fiat $\omega = a\int \frac{\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{x\,\text{cof.}\,\Phi}$. Verum inde habebitur

$$c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = x\,x\,\text{ſin.}\,\Phi^2, \text{ hincque}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{c\,c}{a\,a + x\,x} \text{ et cof.}\,\Phi^2 = \frac{a\,a - c\,c + x\,x}{a\,a + x\,x}.$$

Sumtis logarithmis erit

$$2\,l\,\text{cof.}\,\Phi = l\,(a\,a - c\,c + x\,x) - l\,(a\,a + x\,x),$$

vnde differentiando fiet

$$\frac{\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = \frac{-x\,\partial x}{a\,a - c\,c + x\,x} + \frac{x\,\partial x}{a\,a + x\,x},$$

quo valore ſubſtituto prodit

$$\omega = a\int \frac{\partial x}{a\,a + x\,x} - a\int \frac{\partial x}{a\,a - c\,c + x\,x},$$

vbi pars prior manifeſto fit

$$= A\,\text{tang.}\,\frac{x}{a} = A\,\text{tang.}\,\frac{\sqrt{(c\,c - a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\,\Phi}.$$

Pro parte autem poſteriore tres caſus conſiderari conuenit, prouti fuerit vel $a > c$, vel $a < c$, vel $a = c$, quos ſingulos igitur percurramus.

Caſus I.

$a > c$.

§. 13. Sit igitur primo $a > c$, ponaturque $aa - cc = bb$, eritque

$$\int \frac{a\,\partial x}{aa - cc + xx} = \int \frac{a\,\partial x}{bb + xx} = \frac{a}{b}\int \frac{b\,\partial x}{bb + xx},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{b} = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{b\,\text{ſin.}\,\Phi},$$

quocirca pro hoc caſu habebimus

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}} + C.$$

Pro conſtante C autem determinanda notetur, initio fieri tam $\omega = 0$ quam $\Phi = 0$, vnde concluditur $C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right)$, quo valore inducto erit

$$\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right) + \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tg.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}},$$

qui valor etiam ita referri poteſt:

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}} - \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur caſu ſin. Φ non vltra terminum $\frac{c}{a}$ augeri poteſt; quando autem fit ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$, tum fit angulus

$$\omega = \left(\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}} - 1\right) 90^\circ$$

et diſtantia $z = \sqrt{(aa - cc)}$.

§. 14. Hoc igitur caſu angulus ω per ſolos arcus circulares, ideoque etiam per angulos definitur; vnde ſi modo hi anguli rationem teneant rationalem inter ſe, id quod euenit quoties $\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}$ fuerit numerus rationalis, angulum ω geometrice definire licebit, ſicque ipſa curua tractoria euadet algebraica, ſiue eius natura per aequationem algebraicam exprimi poterit. Haec igitur circumſtantia vtique meretur, vt exemplo illuſtretur.

Exem-

Exemplum.

§. 15. Euoluamus igitur caſum quo $\frac{c}{\sqrt{(aa-cc)}} = 2$, ſiue $c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$: ſic enim fiet $\sqrt{(aa-cc)} = \frac{1}{2}a$, hincque porro

$$\omega = 2\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}} - \text{A tang.}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Cum igitur in genere ſit $2\,\text{A tang.}\,t = \text{A tang.}\,\frac{2t}{1-tt}$, noſtro autem caſu ſit $t = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}$, erit

$$2\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}} = \text{A tang.}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{3-5\,\text{ſin.}\,\Phi^2},$$

ideoque erit

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{3-5\,\text{ſin.}\,\Phi^2} - \text{A tang.}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Cum porro ſit $\text{A tang.}\,p - \text{A tang.}\,q = \text{A tang.}\,\frac{p-q}{1+pq}$, quia noſtro caſu eſt

$$p = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{3-5\,\text{ſin.}\,\Phi^2} \text{ et } q = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}, \text{ erit}$$

$$p-q = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi^3}{(3-5\,\text{ſin.}\,\Phi^2)\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}} \text{ et } 1+pq = \frac{3-\text{ſin.}\,\Phi^2}{3-5\,\text{ſin.}\,\Phi^2},$$

conſequenter obtinebimus

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi^3}{(3-\text{ſin.}\,\Phi^2)\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi^3}{(3-\text{ſin.}\,\Phi^2)\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur modo ex aſſumto angulo Φ colligitur angulus ω.

§. 16. Porro igitur cum pro hoc exemplo ſit

$$z = a\,\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}a\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)},$$

ſi ex puncto Z ad rectam C B ducatur normalis Z X, et pro Tractoria vocenter coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, fiet $x = z\,\text{coſ.}\,\omega$ et $y = z\,\text{ſin.}\,\omega$, ſicque tam x quam y per eundem angulum Φ determinabitur. Ex tangente autem anguli ω concluditur

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi^3}{3\,\text{coſ.}\,\Phi^2+3} \text{ et } \text{coſ.}\,\omega = \frac{(3-\text{ſin.}\,\Phi^2)\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{3\,\text{coſ.}\,\Phi^2\sqrt{3}}.$$

Quodſi autem hinc ipſum angulum Φ eliminare vellemus, aequatio inter x et y ſine dubio ad plures dimenſiones aſſurgeret. Interim tamen conſtructio geometrica huius curuae non nimis eſt prolixa.

§. 17. Ad has formulas ſimpliciores reddendas ſtatuatur $\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\Phi^2)} = 2u\,\text{ſin.}\Phi$, vt fiat $z = a\,\text{cof.}\Phi + a\,u\,\text{ſin.}\Phi$, et tang. $\omega = \frac{\text{ſin.}\Phi^2}{u(3-\text{ſin.}\Phi^2)}$; tum autem erit ſin. $\Phi^2 = \frac{3}{4(1+uu)}$, vnde fit tang. $\omega = \frac{1}{3+4uu}$. Deinde vero ob cof. $\Phi^2 = \frac{1+4uu}{4(1+uu)}$ fiet $z = \frac{\sqrt{(1+4uu)}+u\sqrt{3}}{2\sqrt{(1+uu)}}$. Ponatur porro $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{(1+4uu)}} = \text{cof.}\,\theta$, erit ſin. $\theta = \sqrt{\frac{1+uu}{1+4uu}}$, vnde fit $\frac{z}{a} = \frac{1+\text{cof.}\,\theta}{2\,\text{ſin.}\,\theta} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\theta$, deinde vero ob $uu = \frac{\text{cof.}\,\theta^2}{3-4\,\text{cof.}\,\theta^2}$ erit tang. $\omega = \frac{3-4\,\text{cof.}\,\theta^2}{9-8\,\text{cof.}\,\theta^2} = \frac{4\,\text{ſin.}\,\theta^2-1}{1+8\,\text{ſin.}\,\theta^2}$.

Caſus II.

$a < c$.

§. 18. Sit iam $a < c$, ponaturque $cc = aa + bb$, eritque

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\Phi} - a\int\frac{\partial x}{x\,x-b\,b}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{a\,\partial x}{x\,x-b\,b} = \frac{a}{b}\int\frac{b\,\partial x}{x\,x-b\,b} = \frac{a}{2b}\,l\,\frac{x-b}{x+b}.$$

Cum igitur ſit $x = \frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}}{\text{ſin.}\Phi}$ et $b = \sqrt{(cc-aa)}$, hinc colligitur

$$\omega = C + \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\Phi} - \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}-\text{ſin.}\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}+\text{ſin.}\Phi\sqrt{(cc-aa)}},$$

vbi quia initio fieri debet tam $\Phi = 0$ quam $\omega = 0$, erit conſtans $C = -\frac{\pi}{2}$, vnde fit

$$\omega = \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}+\text{ſin.}\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}-\text{ſin.}\Phi\sqrt{(cc-aa)}} - \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\Phi}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}}.$$

Manet autem vt ante $z = a\,\text{cof.}\Phi + \sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\Phi^2)}$, vnde patet, has curuas ſemper eſſe tranſcendentes. Ceterum quia hic

hic $c > a$, euidens eſt, angulum Φ a o vsque ad 90° increſcere poſſe, cum primo caſu, vbi erat $c < a$, angulus Φ eo vsque tantum creſcere poterat, quoad fiat ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$.

Caſus III.

$c = a$.

§. 19. Poſito autem $c = a$ ſtatim fit $z = 2a$ cof. Φ et $\omega = a\int \frac{\partial x}{aa+xx} - \int \frac{a\,\partial x}{xx}$, ideoque

$$\omega = \text{A tang.}\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + C = \text{A tang.}\frac{\text{cof.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi} + \text{tang.}\Phi + C.$$

Hoc ergo modo determinata conſtante prodit $\omega = \text{tang.}\Phi - \Phi$; vnde intelligitur, ſi angulus Φ increſcat vsque ad 90°, tum fore angulum $\omega = \infty$, ſcilicet hoc caſu filum per infinitas revolutiones in circulo protrahi poterit. Tum autem denique fiet $z = 0$; vnde patet, confectis infinitis reuolutionibus corpuſculum tandem in ipſum centrum circuli peruenire, ibique in quiete eſſe permanſurum.

§. 20. Ceterum pro ſecundo caſu ſingulare phaenomenon ſeſe exſerit. Statim enim primae aequationi $aa + zz - 2az\,\text{cof.}\Phi = cc$ ſatisfieri manifeſtum eſt, ſi fuerit $\Phi = 90°$ et $z = \sqrt{(cc - aa)}$; tum autem angulus ω plane non determinatur; quia fit $\partial\omega = \frac{0}{0}$, et hoc caſu ipſa curua tractoria erit circulus etiam centro C radio $cc - aa$ deſcriptus: huius enim tangentes, ad circulum A C B productae, aequabuntur longitudini fili a; atque ad hunc caſum omnes reliqui motus poſt infinitas reuolutiones reducentur, ita vt hae Tractoriae tandem in circulum abeant. Neque tamen ex hac ſolutione ipſam formam harum Tractoriarum ſatis commode cognoſcere licet, vnde aliam ſolutionem ſubiungamus ad hunc ſcopum magis accommodatam.

Alia methodus
Tractorias ex circulo natas determinandi.

§. 21. Maneant denominationes ante adhibitae, ſcilicet longitudo fili $BA = ZT = a$, radius circuli $CA = CT = c$, diſtantia $CZ = z$, angulus $ACZ = \omega$ et angulus $CZT = \Phi$, vnde fit vt ante $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}$ tang. Φ. Nunc autem inſuper vocemus angulum $ZCT = \theta$, ad quem omnia elementa curvae reuocemus. Tandem etiam ſit angulus $ACT = \omega + \theta = \psi$, quandoquidem hoc modo ſtatim innoteſcet punctum T, quousque filum iam eſt protractum.

§. 22. His poſitis ex T ad rectam CZ agatur normalis TP, et ex triangulo CTP erit $TP = c$ ſin. θ et $CP = c$ coſ. θ: at ex triangulo ZTP erit $TP = a$ ſin. Φ et $ZP = a$ coſ. Φ, vnde ſtatim colligitur $z = a$ coſ. $\Phi + c$ coſ. θ; tum vero c ſin. $\theta = a$ ſin. Φ, vnde ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$ ſin. θ, coſ. $\Phi = \frac{\sqrt{(aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2)}}{a}$ et tang. $\Phi = \frac{c\,\text{ſin.}\,\theta}{\sqrt{(aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2)}}$. Differentiemus nunc binas illas aequationes, et prodibit

I. $-\partial z = a\,\partial\Phi$ ſin. $\Phi + c\,\partial\theta$ ſin. θ et

II. $0 = a\,\partial\Phi$ coſ. $\Phi - a\,\partial\theta$ coſ. θ,

vnde combinatio: I. coſ. Φ — II. ſin. Φ praebet $-\partial z$ coſ. $\Phi = c\,\partial\theta$ ſin. θ coſ. $\Phi + c\,\partial\theta$ coſ. θ ſin. $\Phi = c\,\partial\theta$ ſin. $(\theta + \Phi)$. At vero ex triangulo CAT habetur CT : ſin. $\theta = z$: ſin. $(\theta + \Phi)$, ideoque ſin. $(\theta + \Phi) = \frac{z\,\text{ſin.}\,\theta}{a}$: hoc ergo valore adhibito fiet $-\partial z$ coſ. $\Phi = \frac{c\,z\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{a}$, ideoque $-\frac{\partial z}{z} = \frac{c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{a\,\text{coſ.}\,\Phi}$.

§. 23. Ex hoc igitur valore nanciſcimur $\partial\omega = \frac{c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,\text{coſ.}\,\Phi^2}$; erat autem ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$ ſin. θ et coſ. $\Phi^2 = \frac{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2}{aa}$, vnde rationa-

tionaliter angulum Φ ex calculo elidimus; prodibit enim

$$\partial\omega = \frac{cc\,\partial\theta\,\mathrm{sin.}\,\theta^2}{aa - cc\,\mathrm{sin.}\,\theta^2} = -\partial\theta + \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\mathrm{sin.}\,\theta^2},$$

vnde cum sit $\partial\omega + \partial\theta = \partial\psi$, erit

$$\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\mathrm{sin.}\,\theta^2} + \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 + (aa - cc)\,\mathrm{sin.}\,\theta^2}.$$

§. 24. Hinc euoluamus primo casum quo $a > c$, ac ponamus breuitatis gratia $aa - cc = bb$, vt habeamus $\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 + ba\,\mathrm{sin.}\,\theta^2}$, pro cuius integrali inueniendo ponamus $\frac{b\,\mathrm{sin.}\,\theta}{a\,\mathrm{cos.}\,\theta} = t$, eritque $\partial t = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2}$; tum vero etiam $1 + tt = \frac{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 + bb\,\mathrm{sin.}\,\theta^2}{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2}$, ideoque $\frac{\partial t}{1+tt} = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\mathrm{cos.}\,\theta^2 + bb\,\mathrm{sin.}\,\theta^2} = \frac{b\,\partial\psi}{a}$, hinc integrando $\frac{b\psi}{a} = \mathrm{A\ tang.}\ t$, quamobrem hinc angulus $\mathrm{A\,C\,T} = \psi$ ita succincte exprimitur, vt sit

$$\psi = \frac{a}{b}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{b\,\mathrm{sin.}\,\theta}{b\,\mathrm{cos.}\,\theta}.$$

§. 25. Pro hoc ergo casu, quo $aa - cc = bb$, ex solo angulo θ omnia elementa, quae ad curuam pertinent, sequenti modo satis concinne exprimuntur: 1.) Pro angulo Φ inuenimus $\mathrm{sin.}\,\Phi = \frac{c}{a}\,\mathrm{sin.}\,\theta$. 2.) Distantia $\mathrm{C\,Z} = z = a\,\mathrm{cos.}\,\Phi + c\,\mathrm{cos.}\,\theta$, siue $z = \sqrt{aa - cc\,\mathrm{sin.}\,\theta^2} + \mathrm{cos.}\,\theta$. Pro angulo $\mathrm{A\,C\,T} = \psi$, prodiit $\psi = \frac{a}{b}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{b\,\mathrm{sin.}\,\theta}{a\,\mathrm{cos.}\,\theta}$, siue $\psi = \frac{a}{b}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{b}{a}\,\mathrm{tang.}\,\theta$, ita vt sit $\frac{b\psi}{a} = \mathrm{A\ tang.}\,\frac{b}{a}\,\mathrm{tang.}\,\theta$ et hinc $\mathrm{tang.}\,\frac{b\psi}{a} = \frac{b}{a}\,\mathrm{tang.}\,\theta$. Nunc igitur facile erit pro angulo θ valores continuo maiores substituere, indeque pro singulis tam distantiam z quam angulum ψ assignare. Hinc autem statim patet, sumto $\theta = 0$ fore 1.) $\Phi = 0$. 2.) $z = a + c$. 3.) $\psi = 0$.

§. 26.

§. 26. Hae igitur formulae imprimis idoneae sunt ad curuam construendam, ac fere sufficiet angulos θ continuo per 90° vel saltem per 45° crescentes assumere. Quod si enim breuitatis gratia angulos α, β, γ ita capiamus, vt sit sin. $\alpha = \frac{c}{a\sqrt{2}}$, tang. $\beta = \frac{b}{a}$ et sin. $\gamma = \frac{c}{a}$, omnes valores ad curuam construendam necessarii in sequenti tabella exhibentur.

θ	Φ	$\approx$	Ψ
0°	0°	$a + c$	0
45	α	a cos. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}\beta$
90	γ	a cos. γ	$\frac{a}{b}90^\circ$
135	α	a cos. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 - \beta)$
180	0	$a - c$	$\frac{a}{b}180$
225	$-\alpha$	a cos. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 + \beta)$
270	$-\gamma$	a cos. γ	$\frac{a}{b}270$
315	$-\alpha$	a cos. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 - \beta)$
360	0	$a + c$	$\frac{a}{b}360$
405	α	a cos. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 + \beta)$
450	γ	a cos. γ	$\frac{a}{b}450$
495	α	a cos. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 - \beta)$
540	0	$a - c$	$\frac{a}{b}540$
585	$-\alpha$	a cos. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 + \beta)$
630	$-\gamma$	a cos. γ	$\frac{a}{b}630$
675	$-\alpha$	a cos. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(720 - \beta)$
720	0	$a + c$	$\frac{a}{b}720$

Vnde patet, quo maior fuerit fractio $\frac{a}{b}$, tum numerum reuolutionum anguli ψ eo magis multiplicari pro iisdem angulis θ;

Ac

ac si fuerit $b = 0$, ideoque $a = 0$, qui erat tertius casus, tum numerum reuolutionum anguli ψ iam fieri infinitum, dum angulus θ tantum vsque ad $90°$ augetur.

§. 27. Sin autem fuerit $aa < cc$, ponamus $cc - aa = bb$, tum erit $\partial\psi = \frac{a\,a\,\partial\theta}{a\,a\,cos.\theta^2 - b\,b\,sin.\theta^2}$. Ponatur $\frac{b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta} = u$, eritque $\partial u = \frac{a\,b\,\partial\theta}{a\,a\,cos.\theta^2}$ et $1 - u\,u = \frac{a\,a\,cos.\theta^2 - b\,b\,sin.\theta^2}{a\,a\,cos.\theta^2}$, vnde fit

$$\frac{\partial u}{1 - u\,u} = \frac{a\,b\,\partial\theta}{a\,a\,cos.\theta^2 - b\,b\,sin.\theta^2} = \frac{b\,\partial\psi}{a},$$

hincque integrando colligitur $\frac{b\psi}{a} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+u}{1-u}$, ex quo adipiscimur $\psi = \frac{a}{2b}\,l\,\frac{a\,cos.\theta + b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta - b\,sin.\theta}$; vbi patet, quia valorem ipsius u non vltra vnitatem augere licet, angulum θ nunquam maiorem euadere posse, quam donec fiat tang. $\theta = \frac{a}{b}$, quippe quo casu angulus ψ iam in infinitum increscit; atque hinc simul intelligitur, si fuerit $b = 0$, siue $a = c$, tum ob $\partial\psi = \frac{\partial\theta}{cos.\theta^2}$, fore $\psi =$ tang. θ, qui erat tertius casus ante commemoratus.

§. 28. Quoniam igitur, si filum corpusculo alligatum per peripheriam circuli circumducitur, Tractoria semper assignari et construi potest, videamus cuiusmodi forma Riccatianae similis huic casui respondeat.

§. 29. Vt igitur hunc casum ad figuram supra consideratam accommodemus, rectae B A C normaliter iungamus rectam C D, in eamque tam ex Z quam ex T, perpendicula Z X et T U demittamus, sitque, vt supra posuimus, C X $= x$ et X Z $= y$; tum vero C U $= u$ et U T $= t$, statuaturque porro $\partial y = p\,\partial x$, quibus positis supra deducti fuimus ad hanc aequationem: $\frac{a\,\partial p}{\sqrt{1+p\,p}} + p\,\partial u = \partial t$, quae posito $p = \frac{q\,q-1}{2q}$ trans- Tab. I. Fig. 4.

 formatur

formatur in hanc rationalem: $a\,\partial q + \frac{1}{2}(qq-1)\,\partial u = q\,\partial t$, ſiue $a\,\partial q - q\,\partial t + \frac{1}{2}qq\,\partial u = \frac{1}{2}\partial u$. Pro praeſente autem caſu, ob angulum $ACZ = \omega$ et $CZ = z$, fit $x = z$ ſin. ω et $y = z$ coſ. ω. Deinde ob $CT = t$ et angulum $ACT = \psi$, erit $u = c$ ſin. ψ et $t = c$ coſ. ψ; praeterea vero habebimus

$$\partial x = \partial z \text{ ſin. } \omega + z\,\partial\omega \text{ coſ. } \omega \text{ et}$$

$$\partial y = \partial z \text{ coſ. } \omega - z\,\partial\omega \text{ ſin. } \omega, \text{ vnde fit}$$

$$p = \frac{\partial z \text{ coſ. } \omega - z\,\partial\omega \text{ ſin. } \omega}{\partial z \text{ ſin. } \omega + z\,\partial\omega \text{ coſ. } \omega}.$$

Erat autem $\frac{\partial z}{z} = -\frac{c\,\partial\theta \text{ ſin. } \theta}{a \text{ coſ. } \Phi}$, vnde nanciſcimur

$$p = \frac{-c\,\partial\theta \text{ ſin. } \theta \text{ coſ. } \omega - a\,\partial\omega \text{ coſ. } \Phi \text{ ſin. } \omega}{-c\,\partial\theta \text{ ſin. } \theta \text{ ſin. } \omega + a\,\partial\omega \text{ coſ. } \Phi \text{ coſ. } \omega}.$$

Quia autem repertum eſt $\partial\omega = \frac{c\,\partial\theta \text{ ſin. } \theta \text{ ſin. } \Phi}{a \text{ coſ. } \Phi^2}$, erit excluſis differentialibus

$$p = \frac{\text{coſ. } \omega \text{ coſ. } \Phi + \text{ſin. } \omega \text{ ſin. } \Phi}{\text{ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi - \text{coſ. } \omega \text{ ſin. } \Phi} = \frac{\text{coſ. } (\omega - \Phi)}{\text{ſin. } (\omega - \Phi)} = \cot.\,(\omega - \Phi),$$

tum vero, ob $q = p + \sqrt{(1 + p\,p)}$, erit nunc

$$q = \frac{1 + \text{coſ. } (\omega - \Phi)}{\text{ſin. } (\omega - \Phi)} = \cot.\,\tfrac{1}{2}(\omega - \Phi).$$

Hocque modo valor quantitatis q ſatis ſimpliciter per angulos ω et Φ exprimitur. Deinde vero ex valoribus pro t et u inventis erit $\partial t = -c\,\partial\psi$ ſin. ψ et $\partial u = c\,\partial\psi$ coſ. ψ, ſicque formula noſtra Riccatiana ita ſe habebit:

$$a\,\partial q + cq\,\partial\psi \text{ ſin. } \psi + \tfrac{1}{2}cqq\,\partial\psi \text{ coſ. } \psi = \tfrac{1}{2}c\,\partial\psi \text{ coſ. } \psi,$$

inuoluens duas tantum variabiles q et angulum ψ.

§. 30. Viciſſim igitur, quoties occurrit huiusmodi aequatio differentialis reſoluenda:

$$a\,\partial q + cq\,\partial\psi \text{ ſin. } \psi + \tfrac{1}{2}cqq\,\partial\psi \text{ coſ. } \psi = \tfrac{1}{2}c\,\partial\psi \text{ coſ. } \psi,$$

eius reſolutio in noſtra erit poteſtate, quandoquidem nouimus fore $q = \cot.\,\frac{1}{2}(\omega - \Phi)$; quomodo autem anguli ω et Φ ab angulo ψ pendeant, ex ſuperioribus eſt manifeſtum. Primo enim

enim eſt $\psi = \omega + \theta$; tum vero a ſin.$\Phi = c$ ſin.θ; denique vero inuenimus $\psi = \int \frac{a\,a\,\partial\theta}{a\,a\,\text{cof.}\,\theta^2 + (a\,a - c\,c)\,\text{ſin.}\,\theta^2}$, cuius ope primo ex angulo ψ reperitur angulus θ, hincque porro angulus Φ ex formula ſin.$\Phi = \frac{c}{a}$ ſin.θ, ac tandem $\omega = \psi - \theta$. Ex his igitur angulus $(\omega - \Phi)$, per quem quantitas q exprimitur, erit $= \psi - \Phi - \theta$. Hunc in finem prolongetur recta Z T in S, et quia angulus C T S $= \theta + \Phi$ et C T U $= \psi$, erit angulus U T S $= \theta + \Phi - \psi$, ita vt iam ſit $q = -$ cot.$\frac{1}{2}$ U T S.

§. 31. Quo hanc formulam Riccatianam ſimpliciorem reddamus, ponamus $c = 2\,n\,a$, vt prodeat

$$\partial q + 2\,n\,q\,\partial\psi\,\text{ſin.}\,\psi + n\,q\,q\,\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi = n\,\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi,$$

quam vt ab angulis liberemus, ponamus cof.$\psi = s$, ita vt ſin.$\psi = \sqrt{(1 - s\,s)}$, eritque aequatio

$$\partial q - 2\,n\,q\,\partial s - \frac{n\,q\,q\,s\,\partial s}{\sqrt{(1-s\,s)}} = -\frac{n\,s\,\partial s}{\sqrt{(1-s\,s)}},$$

vel ſi ponamus ſin.$\psi = r$, prodibit haec forma:

$$\partial q - \frac{2\,n\,q\,r\,\partial r}{\sqrt{(1-r\,r)}} + n\,q\,q\,\partial r = n\,\partial r.$$

Quod ſi ponamus $q = v + \frac{r}{\sqrt{(1-r\,r)}}$, prodibit iſta aequatio:

$$\partial v + n\,v\,v\,\partial R = n\,\partial r - \frac{n\,r\,r\,\partial r}{1-r\,r} + \frac{2\,n\,r\,r\,\partial r}{\sqrt{(1-r\,r)}} - \frac{\partial r}{(1-r\,r)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius ergo reſolutionem ope noſtrae Tractoriae expedire licet.

§. 32. Reducamus eandem aequationem tantum ad ternos terminos, ponendo $q = e^{-2\,n\sqrt{(1-r\,r)}}\,v$, ac peruenietur ad hanc formam:

$$\partial v + n\,e^{-2\,n\sqrt{(1-r\,r)}}\,v\,v\,\partial r = n\,e^{2\,n\sqrt{(1-r\,r)}}\,\partial r$$

quae porro, ponendo $\sqrt{(1-r\,r)} = s$, induet hanc formam:

$$\partial v - n e^{-2ns} \frac{v v s \partial s}{\sqrt{(1-ss)}} + \frac{n e^{+2ns} s \partial s}{\sqrt{(1-ss)}} = 0.$$

Hae autem formulae ita comparatae videntur, vt per ſolitas methodos haud facile tractari queant.

Animaduerſiones generales in hunc motum tractorium.

§. 33. In hoc motu tractorio aſſumitur, corpuſculum quouis momento ſecundum ipſam fili directionem protrahi, quod quidem per principia mechanica eueniret, ſi corpuſculum quouis momento quieſceret, vel iam motum ſecundum eandem directionem habuiſſet, quod poſterius autem locum habere nequit, quandoquidem directionem motus continuo mutari aſſumimus; vnde patet, iſtam deſcriptionem per motum tractorium locum plane habere non poſſe, niſi quouis momento motus corpuſculo impreſſus ſubito rurſus extinguatur. Quod cum principiis motus directe aduerſetur, manifeſtam eſt talem motum tractorium in natura neutiquam produci poſſe, niſi forte frictio infinite magna ſtatuatur.

§. 34. Vulgo quidem talis motus facile obtineri poſſe videtur, cum, experentia teſte, omnia corpora, quae in ſuperficie plana protrahi ſolent, eo ipſo momento, quo vis trahens ceſſat, ſubito ad quietem redigi cernuntur, quemadmodum currus ab equis protracti, ſimulac vis trahens ceſſat, ſubito ſubſiſtere ſolent; vnde plures philoſophi principiorum motus ignari concludere ſunt conati, omnia corpora niſu eſſe praedita ſeſe ad ſtatum quietis accommodandi. Quam abſurda autem ſit talis opinio nunc quidem non amplius probatione eget.

§. 35.

§. 35. Interim tamen, experientiam consulentes, negare non possumus, quin corpora, super plano tantillum aspero producta, quasi eo ipso momento omnem motum perdant, quo vis trahens cessauerit, quod certe nullo modo euenire posset, si planum perfecte esset politum, vt omnis frictio excluderetur, quippe quo casu corpus adeo motu semel acquisito perpetuo vniformiter esset progressurum; ex quo statim intelligitur, phaenomenon allatum nulli caussae, praeter frictionem adscribi posse.

§. 36. Neque vero etiam hoc modo omnibus difficultatibus occurri potest, dum ex motus principiis certum est, nullum plane motum a frictione, quantumuis fuerit magna, subito, atque eo ipso momento, quo vis trahens cessat, destrui posse, sed ad hoc semper aliquod tempus requiri, quantumuis id fuerit exiguum; ita vt certe affirmare debeamus, nullum plane motum frictione subito ad quietem redigi posse, ac si tale tempus sentiri nequeat, id ita esse exiguum, vt obseruari non possit.

§. 37. Quo igitur omnia dubia, quae in hoc negotio se produnt, clarius diluamus, consideremus corpus, quod super plano horizontali acceperit celeritatem $= c$, ac videamus quanto tempore opus sit, vt iste motus a frictione penitus extinguatur. Fuerit igitur istud corpus eo momento, quo vis sollicitans cessauit, in A, vnde celeritate sua c vlterius progredi conetur. Peruenerit igitur post tempus $= t$ vsque in p, confecto spatio $AP = s$, sitque massa corporis $= M$, et vis frictionis $= F$, celeritas autem in P vocetur $= v$, eritque $\partial v = -\frac{2gF}{M}\partial t$, vnde colligitur $v = C - \frac{2gFt}{M}$. Fiat nunc $v = 0$ ac reperietur tempus, quo hoc euenire potest, $t = \frac{Mc}{2gF}$, quod in minutis secundis exprimetur, si g fuerit altitudo, per quam Tab. I. Fig. 5.

grauia vno minuto ſecundo delabuntur, celeritas autem c per ſpatium vno minuto ſecundo percurrendum exprimatur. Hinc igitur ſi frictio, vt vulgo ſumi ſolet, tertiae parti ponderis M aequetur, vt ſit $F = \frac{1}{3} M$, erit tempus quo motus penitus extinguitur $= \frac{3c}{2g}$, vnde cum propemodum ſit $g = 16$ ped. Londin. et c in iisdem pedibus exprimatur, fiet $t = \frac{3}{32} c$ péd.

§. 38. Plerumque autem in huiusmodi motibus tractoriis celeritas corporibus impreſſa c tam exigua eſſe ſolet, vt tempuſculum ad motus extinctionem requiſitum t ſenſus nostros effugiat. Si enim celeritati c pes integer tribuatur, tempus iſtud tantum erit $\frac{3}{32}$, ideoque nequidem decima pars minuti ſecundi, quod nemo facile obſeruare poteſt. Verum ſi quis forte tale tempuſculum animaduerti poſſe contendat, probe hic perpendendum, nullam vim trahentem ita ſubito ceſſare poſſe, quemadmodum in hoc calculo ſuppoſuimus, ſed potius paullatim ad nihilum redigi; vnde mirum non eſt ſi hoc tempuſculum plane non obſeruare licet, quoniam motus extinctio iam ante incepit, quam vis trahens ad nihilum fuit perducta.

§. 39. Ex his iam intelligitur, tales curuas, quales hactenus per calculum ſunt definitae, produci non poſſe, niſi ſuper plano horizontali ſatis aſpero; praeterea vero imprimis neceſſe eſſe vt motus, quo filum protrahitur, ſit non ſolum lentiſſimus, ſed etiam per interualla temporis quam minima penitus ſiſtatur et quaſi per ſaltus peragatur. Statim enim ac motus fili fuerit continuus, curua, quam corpuſculum deſcribet, plurimum aberrabit a Tractoria vulgari: cuiusmodi autem curvam ſit deſcripturum, ſi filum motu continuo protrahatur, quaeſtio eſt maxime ardua, cui reſoluendae Analyſis vix ſufficere videtur, ad quod oſtendendum caſum ſaltem ſimpliciſſimum, quo

quo filum ſuper plano horizontali iuxta lineam rectam vniformiter protrahitur, euoluamus.

De vera curua tractoria, dum filum per lineam rectam vniformiter protrahitur.

§. 40. Protrahatur igitur filum per lineam rectam A D celeritate $= c$, et elapſo tempore $= t$ perductum ſit vsque in T, dum motus inceperit in puncto A, eritque ſpatium $AT = ct$, corpuſculum autem nunc ſit in Y, ita vt fili longitudo ſit $TY = a$. Vocemus autem angulum $ATY = \theta$, vnde demiſſo ex Y perpendiculo YX erit $TX = a \cos.\theta$ et $YX = a \sin.\theta$, ita vt poſitis coordinatis $AX = x$ et $XY = y$, ſit Tab. I. Fig. 6.

$$x = Ct - a\cos.\theta; \quad \partial x = c\partial t + a\partial\theta \sin.\theta,$$
$$y = a\sin.\theta \quad ; \quad \partial y = a\partial\theta\cos.\theta.$$

Ponamus autem porro $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang.}\,\Phi$, ita vt Φ denotet angulum, ſub quo elementum curuae deſcriptae Yy ad axem AB inclinatur, ita vt ſit tang. $\Phi = \frac{a\partial\theta\cos.\theta}{c\partial t + a\partial\theta\sin.\theta}$.

§. 41. Denotet nunc M maſſam ſeu pondus corpuſculi, et ponatur tenſio fili $TY = T$, quae ergo eſt vis, qua corpuſculum a filo protrahitur, quae ſecundum directiones coordinatarum reſoluta praebet vim ſecundum $AX = T\cos.\theta$, et vim ſecundum $XY = T\sin.\theta$, vbi notandum eſt hanc vim T adhuc eſſe incognitam. Praeterea vero etiam corpuſculum a frictione ſollicitatur, cuius vis ſit $= F$, quae cum ſemper directioni motus ſit contraria, eius directio erit yY, quae ergo reſoluta praebet vim ſecundum $AX = -F\cos.\Phi$ et vim ſecundum $XY = -F\sin.\Phi$. His igitur viribus colligendis ſumto elemento temporis ∂t conſtante principia motus ſequentes ſuppeditant aequationes:

I.)

I.) $\frac{M \partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = T \cos.\theta - F \cos.\Phi.$

II.) $\frac{M \partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = -T \sin.\theta - F \sin.\Phi.$

§. 42. Elidamus hinc ſtatim tenſionem fili T, vtpote incognitam, et haec combinatio: I. $\sin.\theta$ + II. $\cos.\theta$ dabit hanc aequationem:

$$\frac{M(\partial\partial x \sin.\theta + \partial\partial y \cos.\theta)}{2g\,\partial t^2} = -F(\cos.\Phi \sin.\theta + \sin.\Phi \cos.\theta)$$
$$= -F \sin.(\Phi + \theta).$$

Statuamus nunc breuitatis gratia $\frac{2gF}{M} = b$; vbi notetur, g exprimere altitudinem lapſus grauium pro vno minuto ſecundo, et fractionem $\frac{F}{M}$ vulgo aeſtimari $= \frac{1}{3}$; ſicque tota quaeſtio reducta eſt ad reſolutionem huius aequationis:

$$\frac{\partial\partial x \sin.\theta + \partial\partial y \cos.\theta}{\partial t^2} = -b(\sin.\theta \cos.\Phi + \cos.\theta \sin.\Phi).$$

Cum autem ſit

$$\partial\partial x = a\,\partial\partial\theta \sin.\theta + a\,\partial\theta^2 \cos.\theta \text{ et}$$
$$\partial\partial y = a\,\partial\partial\theta \cos.\theta - a\,\partial\theta^2 \sin.\theta,$$

aequatio reſoluenda induet hanc formam:

$$\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} + b(\sin.\theta \cos.\Phi + \cos.\theta \sin.\Phi) = 0,$$

ex qua angulus Φ facile eliminatur per formulas

$$\sin.\Phi = \frac{a\,\partial\theta \cos.\theta}{\sqrt{(c\,c\,\partial t^2 + 2\,a\,c\,\partial t\,\partial\theta \sin.\theta + a\,a\,\partial\theta^2)}} \text{ et}$$
$$\cos.\Phi = \frac{c\,\partial t + a\,\partial\theta \sin.\theta}{\sqrt{(c\,c\,\partial t^2 + 2\,a\,c\,\partial t\,\partial\theta \sin.\theta + a\,a\,\partial\theta^2)}}.$$

His enim valoribus ſubſtitutis habebimus

$$\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} + \frac{b(a\,\partial\theta + c\,\partial t \sin.\theta)}{\sqrt{(c\,c\,\partial t^2 + 2\,a\,c\,\partial t\,\partial\theta \sin.\theta + a\,a\,\partial\theta^2)}} = 0.$$

§. 43. Antequam autem reſolutionem huius aequationis ſuſcipiamus, perpendamus caſum, quo fricti o plane euanescit

cit, ita vt sit $b = 0$, ac motus totus continebitur in hac simpliciſſima aequatione: $\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} = 0$, hinc $\frac{a\,\partial\theta}{\partial t} =$ conſt. hoc eſt celeritas angularis erit conſtans, quae, quoniam angulus θ continuo minuitur, ponatur $\frac{a\,\partial\theta}{\partial t} = -f$, vnde fit $a\,\theta = k - f\,t$. Hinc ſi ponamus initio, vbi $t = 0$, filum tenuiſſe ſitum A C normalem ad axem, ita vt tum fuerit $\theta = 90°$, erit $k = a \cdot 90°$, ideoque $\theta = 90 - \frac{f}{a} \cdot t$. Denotabit ergo $\frac{f}{a}$ certum angulum, qui ſit $= \alpha$, ita vt habeamus $\theta = 90° - \alpha\,t$, quo inuento habebimus $x = c\,t - a$ ſin. $\alpha\,t$ et $y = a$ coſ. $\alpha\,t$, hincque porro $\frac{\partial x}{\partial t} = c - a\,\alpha$ coſ. $\alpha\,t$ et $\frac{\partial y}{\partial t} = -a\,\alpha$ ſin. $\alpha\,t$. Vnde ſi initio corpuſculum in C quieuiſſe ſumamus, tam $\frac{\partial x}{\partial t}$ quam $\frac{\partial y}{\partial t}$ ibi euanuiſſe neceſſe eſt, cui conditioni ſatisfit ſi ſumatur $\alpha = \frac{c}{a}$, ita vt ſit $\theta = 90° - \frac{c\,t}{a}$, hincque

$$x = c\,t - a \text{ ſin. } \frac{c\,t}{a} \text{ et } y = a \text{ coſ. } \frac{c\,t}{a}.$$

Ex poſteriore fit $\frac{c\,t}{a} =$ A coſ. $\frac{y}{a}$, quo valore ſubſtituto fiet

$$x = a \text{ A coſ. } \frac{y}{a} - \sqrt{(a\,a - y\,y)},$$

vnde patet hanc curuam fore cycloidem inuerſam, a circulo, cuius radius $= a$, ſub recta C D axi parallela, voluente deſcriptam, cuius cuſpis in ipſo puncto C ſit ſita.

§. 44. Contemplemur etiam caſum oppoſitum, quo frictio eſſet infinita, ideoque $b = \infty$, et in noſtra aequatione primum membrum prae altero euaneſcet, eritque $a\,\partial\theta + c\,\partial t$ ſin. $\theta = 0$, vnde fit $c\,\partial t = -\frac{a\,\partial\theta}{\text{ſin. }\theta}$ et integrando $c\,t = -a\,l$ tang. $\frac{1}{2}\theta +$ C. Vnde ſi pro $t = 0$ fuerit $\theta = 90°$, erit C $= 0$ ideoque $c\,t = +a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\theta$, ideoque $x = a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\theta - a$ coſ. θ, exiſtente $y = a$ ſin. θ, ex quibus formulis manifeſto deducitur Tractoria vulgaris. Cum enim ob $c\,\partial t = -\frac{a\,\partial\theta}{\text{ſin. }\theta}$, ſit $\partial x = -\frac{a\,\partial\theta\,\text{coſ. }\theta^2}{\text{ſin. }\theta}$ et $\partial y = a\,\partial\theta$ coſ. θ, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = -$ tang. θ, vnde patet ipſum ſi-

ſum Y T eſſe tangentem curuae. Ex hoc iam intelligitur, quod ſupra obſeruauimus, Tractorias vulgares tum demum prodire, quando frictio eſt infinite quaſi magna, vel, quod eodem redit, quando vis trahens frictionem quam minime ſuperat.

§. 45. His praemiſſis videamus quomodo aequationem ſupra inuentam tractari conueniat. Ac primo quidem eam ad differentialem primi gradus reduci conueniet, quod fiet ſi ponatur $\partial t = \frac{\partial \theta}{p}$. Quia enim ∂t conſtans eſt aſſumtum, hinc fiet $\partial \partial \theta = \frac{\partial p \partial p}{p}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{a\,p\,\partial p}{\partial \theta} + \frac{b\,(a\,p + c\,\mathrm{ſin.}\,\theta)}{\sqrt{(c\,c + 2\,a\,c\,p\,\mathrm{ſin.}\,\theta + a\,a\,p\,p)}} = 0,$$

quae autem quomodo ad integrabilitatem perduci queat nullo modo patet.

§. 46. Eam quidem ab irrationalitate liberare haud eſt difficile. Ponatur enim $\frac{a\,p + c\,\mathrm{ſin}\,\theta}{c\,\mathrm{coſ.}\,\theta} = \mathrm{tang.}\,\omega$, ita vt ſit

$$p = \frac{c\,\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{tang.}\,\omega - c\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{a}, \text{ vnde fit}$$

$$a\,p = \frac{c\,\mathrm{ſin.}\,(\omega - \theta)}{\mathrm{coſ.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\partial p = -\frac{1}{a}\left(c\,\partial\theta\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{tang.}\,\omega - \frac{c\,\partial\omega\,\mathrm{coſ.}\,\theta}{\mathrm{coſ.}\,\omega^2} + c\,\partial\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta\right)$$

$$= +\frac{c\,\partial\omega\,\mathrm{coſ.}\,\theta}{a\,\mathrm{coſ.}\,\omega^2} - \frac{c\,\partial\theta}{a}\,\frac{\mathrm{coſ.}\,(\theta - \omega)}{\mathrm{coſ.}\,\omega},$$

formula autem irrationalis ſequentem induet formam: $\frac{c\,\mathrm{coſ.}\,\theta}{\mathrm{coſ.}\,\theta}$. Subſtituantur igitur iſti valores atque emerget ſequens aequatio:

$$\frac{a\,c\,\partial\omega\,\mathrm{coſ.}\,\theta^2}{a\,\mathrm{coſ.}\,\omega^3} - \frac{c\,c\,\partial\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,(\theta - \omega)}{a\,\mathrm{coſ.}\,\omega^2} + b\,\partial\theta + \frac{b\,\partial\theta\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{\mathrm{ſin.}\,(\omega - \theta)} = 0,$$

quae porro transformatur in hanc:

$$c\,c\,\partial\omega\,\mathrm{coſ.}\,\theta - c\,c\,\partial\theta\,\mathrm{coſ.}\,(\omega - \theta)\,\mathrm{coſ.}\,\omega + \frac{a\,b\,\partial\theta\,\mathrm{coſ.}\,\omega^3\,\mathrm{ſin.}\,\omega}{\mathrm{ſin.}\,(\omega - \theta)} = 0.$$

Statu-

Statuatur porro $\frac{ab}{cc} = n$, eritque

$$\partial\omega \text{ cof. } \theta - \partial\theta \text{ cof. } \omega \text{ cof. } (\omega - \theta) + \frac{n\,\partial\theta \text{ cof. } \omega^3 \text{ fin. } \omega}{\text{fin. } (\omega - \theta)} = 0.$$

Quanquam autem haec aequatio satis prodiit concinna tamen haud patet quomodo eam vlterius resoluere liceat; vnde haec quaestio vires analyseos superare videtur. Multo minus tales quaestiones suscipi poterunt, si filum per lineam curuam vel etiam motu non vniformi protrahatur. Quamobrem tales quaestiones prorsus relinquere cogimur.

DE CVRVIS TRACTORIIS COMPOSITIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14. *Aug.* 1775.

§. 1.

Quando filo, cuius alter terminus ſuper plano horizontali per datam viam protrahitur, duo pluraue corpuſcula fuerint alligata, ita vt ſingula per curuas peculiares procedant, iſtae curuae *Tractoriae compoſitae* ſunt appellatae, quas hic ſimili modo, quo nuper Tractorias ſimplices tractaui, accuratius inveſtigare conſtitui.

§. 2. Primum autem hic obſeruo, ſi hanc quaeſtionem ſecundum principia mechanica, quorſum ea vtique proprie eſt referenda, euoluere vellemus, tunc quidem facile ad formulas differentiales ſecundi gradus perduceremur, quas autem nullo adhuc modo ob defectum Analyſeos reſoluere licet. Hinc iſtam quaeſtionem a Mechanica ad puram Geometriam ſimili modo ſum translaturus, quo Geometrae Tractoriam vulgarem contemplari ſunt ſoliti. Loco ſcilicet verorum principiorum motus hic ſubſtituam hanc Hypotheſin: quod viribus ſollicitantibus non acceleratione quibus ſingula corpuſcula promouentur, ſed ipſa ſpatiola tempuſculo minimo deſcripta, ſint proportionalia, cuiusmodi motum eſſent ſecutura, ſi quo-

vis

vis momento motus iam genitus subito destrueretur et continuo de nouo generari deberet, quemadmodum vere euenire, si frictio esset infinite magna. Iam olim quidem a Marchione Hospitalio in Analysi infinitorum tangentes huiusmodi curuarum definitae reperiuntur; non autem memini vtrum prorsus eadem Hypothesi sit vsus. Ceterum autem istas curuas accuratius hic determinare conabor, quo magis pateat, quantis difficultatibus huiusmodi quaestiones, quae primo intuitu faciles videantur, adhuc sint obuolutae.

Problema I.

Si filum duobus corpusculis A et B fuerit onustum, eiusque terminus R super plano horizontali iuxta lineam rectam I O protrahatur, inuestigare ambas curuas, quas haec duo corpuscula describunt. Tab. I. Fig. 7.

Solutio.

§. 3. Elapso tempore t filum cum corpusculis iam perductum sit in situm A B R, sintque fili portiones $AB = a$ et $BR = b$, dum litterae maiusculae A et B exprimunt massam vtriusque corporis. Hinc ad rectam I O, tanquam ad axem, ducantur perpendicula A P et B Q, ponanturque coordinatae vtriusque curuae $IP = x$, $PA = y$ et $IQ = x'$, $QB = y'$; pro puncto R autem sit spatium $IR = x''$, existente $y'' = 0$. Praeterea vero vocemus angulos $PAB = p$ et $QBR = q$, ac manifestum est fore $IQ = x' = x + a \sin. p$ et $QB = y' = y - a \cos. p$; tum vero $x'' = x + a \sin. p + b \sin. q$ et $y'' = y - a \cos. p - b \cos. q = 0$. Hinc ergo sumtis differentialibus erit

$$\partial x' = \partial x + a\,\partial p \cos. p,$$
$$\partial y' = \partial y + a\,\partial p \sin. p,$$
$$\partial x'' = \partial x + a\,\partial p \cos. p + b\,\partial q \cos. q \text{ et}$$
$$\partial y'' = \partial y + a\,\partial p \sin. p + b\,\partial q \sin. q = 0.$$

§. 4. Cum nunc corpuſcula alias vires non ſuſtineant, niſi quibus filum tenditur, quandoquidem ratio frictionis tanquam infinite ſpectatae iam in noſtra hypotheſi ſtabilita inuolvitur, ſit tenſio portionis $AB = T$, portionis autem $BR = T'$, quibus poſitis corpuſculum A in directione AB ſollicitatur vi $= T$, quae ſecundum coordinatas reſoluta praebet vim ſecundum $IP = T \cos. p$ et ſecundum directionem $AP = -T \cos. p$; alterum vero corpuſculum duas ſuſtinet vires, alteram ſecundum $BA = T$, alteram vero ſecundum $BR = T'$, ex quarum reſolutione naſcuntur: 1°) vis ſecundum $IQ = -T \sin. p + T' \sin. q$ et 2°) ſecundum QB vis $= +T \cos. p - T' \cos. q$. His igitur viribus proportionalia ſunt ſpatiola tempuſculo ∂t percurſa ſecundum easdem directiones, vel potius ipſe motus, qui oritur ſi ſpatiola illa per maſſas vtriusque corpuſculi multiplicentur, quandoquidem maſſarum ratio hic inprimis eſt habenda.

§. 5. Quod ſi ergo motus vtriusque corpuſculi etiam ſecundum directiones coordinatarum reſoluatur, formulae viribus proportionales erunt $A \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$ et $A \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ pro corpuſculo A: at $B \cdot \frac{\partial x'}{\partial t}$ et $B \frac{\partial y'}{\partial t}$ pro corpuſculo B, hincque nanciſcimur ſequentes quatuor aequationes:

I. $\frac{A \partial x}{\partial t} = T \cdot \sin. p.$

II. $\frac{A \partial y}{\partial t} = -T \cdot \cos. p.$

III. $\frac{B \partial x'}{\partial t} = -T \cdot \sin. p + T' \cdot \sin. q.$

IV. $\frac{B \partial y'}{\partial t} = T \cdot \cos. p - T' \cdot \cos. q,$

ex quarum binis prioribus deducitur $\frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang. } p$, tum vero prima cum tertia praebet

$$\frac{A \partial x + B \partial x'}{\partial t} = T' \sin. q;$$

ſecun-

ſecunda autem cum quarta:

$$\frac{A\partial y + B\partial y'}{\partial t} = -T' \text{ cof. } q.$$

Haec igitur aequatio per illam diuiſa dat

$$\frac{A\partial x + B\partial x'}{A\partial y + B\partial y'} = -\text{tang. } q;$$

ſicque ipſae tenſiones T et T′ e calculo ſunt eliſae.

§. 6. Nunc igitur loco x' et y' valores ante datos ſubſtituamus, et aequationes a tenſionibus T et T′ liberatae erunt

I. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang. } p;$

II. $\frac{(A+B)\partial x + B\,a\,\partial p\,\text{cof. } p}{(A+B)\partial y + B\,a\,\partial p\,\text{ſin. } p} = -\text{tang. } q;$

cum quibus aequationibus coniungi oportet ſupra inuentam

$$y - a\,\text{cof. } p - b\,\text{cof. } q = 0.$$

§. 7. Tota igitur noſtri problematis ſolutio perducta eſt ad tres iſtas aequationes, in quibus adhuc continentur quatuor quantitates variabiles, binae ſcilicet coordinatae principales x et y cum binis angulis p et q, quarum ergo ternas per quartam determinare licebit. Ex prima autem commodiſſime definimus $\partial x = -\partial y$ tang. p, qui valor in ſecunda ſubſtitutus dat

$$-\frac{(A+B)\partial y\,\text{tang. } p + B\,a\,\partial p\,\text{cof. } p}{(A+B)\partial y + B\,a\,\partial p\,\text{ſin. } p} = -\text{tang. } q$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(A+B)\partial y(\text{tang. } p - \text{tang. } q) = B\,a\,\partial p(\text{ſin. } p\,\text{tang. } q + \text{cof. } p),$$

hincque porro ad iſtam:

$$(A+B)\partial y\,\text{ſin. }(q-p) = B\,a\,\partial p\,\text{cof. } p\,\text{cof. }(q-p),$$

ideoque

$$\partial y = \frac{B\,a\,\partial p\,\text{cof. } p.\,\text{cof. }(q-p)}{(A+B)\,\text{ſin. }(q-p)},$$

At

At vero ex tertia aequatione eſt $y = a \cos. p + b \cos. q$, vnde fit $\partial y = -a\,\partial p \sin. p - b\,\partial q \sin. q$, ex quo valore naſcitur haec aequatio :

$$\frac{B\,a\,\partial p \cos. p \cos.(q-p)}{(A+B)\,\mathit{sin.}\,(q-p)} = \frac{B\,a\,\partial p \cos. p}{(A+B)\,\mathit{tang.}\,(q-p)} = -a\,\partial p \sin. p - b\,\partial q \sin. q.$$

Hic autem non liquet quomodo reſolutio ſit inſtituenda.

Problema II.

Tab. I. Fig. 8. *Si filo tria corpuscula A, B, C fuerint alligata, eiusque terminus D per lineam rectam I O protrahatur, inueſtigare curuas, quas ſingula corpuscula deſcribent.*

Solutio.

§. 8. Vocentur fili portiones $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ac demiſſis ad rectam I O perpendiculis A P, B Q, C R ponantur coordinatae:

$IP = x$, $IQ = x'$, $IR = x''$;

$PA = y$, $QB = y'$, $RC = y''$;

tum vero ſtatuantur anguli $PAB = p$, $QBC = q$, $RCD = r$, vnde ſtatim fluunt ſequentes relationes:

$$x' - x = a \sin. p, \quad x'' - x' = b \sin. q,$$

$$y - y' = a \cos. p, \quad y' - y'' = b \cos. q,$$

eſtque $y'' = a \cos. r$, hincque

$$y' = b \cos. q + c \cos. r \text{ et}$$

$$y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r.$$

§. 9. Pro motu nunc definiendo denotent litterae T, T′ et T″ tenſiones portionum fili A B, B C et C D, ac per hypotheſin ſtabilitam habebimus ſequentes aequationes:

$\frac{A\,\partial x}{\partial t}$

$$\frac{A\partial x}{\partial t} = T \sin. p,$$
$$\frac{A\partial y}{\partial t} = -T \cos. p,$$
$$\frac{B\partial x'}{\partial t} = -T \sin. p + T' \sin. q,$$
$$\frac{B\partial y'}{\partial t} = T \cos. p - T' \cos. q,$$
$$\frac{C\partial x''}{\partial t} = -T' \sin. q + T'' \sin. r$$
$$\frac{C\partial y''}{\partial t} = +T' \cos. q - T'' \cos. r.$$

Hinc autem formentur sequentes combinationes:

$$\frac{A\partial x + B\partial x'}{\partial t} = T' \sin. q$$
$$\frac{A\partial y + B\partial y'}{\partial t} = -T' \cos. q$$
$$\frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{\partial t} = T'' \sin. r,$$
$$\frac{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''}{\partial t} = -T'' \cos. r.$$

§. 10. Ex his iam aequationibus facile eliminantur tensiones T, T′ et T″, quippe quae sunt incognitae, nihilque ad institutum refert eas nosse; tum autem ad tres istas aequationes peruenietur:

I. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang.}\, p$;

II. $\frac{A\partial x + B\partial x'}{A\partial y + B\partial y'} = -\text{tang.}\, q$;

III. $\frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''} = -\text{tang.}\, r$;

quibus adiungi oportet aequationem iam supra inuentam

$$y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

in quibus aequationibus, si loco x', x'' et y', y'' substituantur valores supra assignati, inerunt adhuc hae quinque variabiles: x, y, p, q, r, quarum ergo quaternas per quintam definiri oportet.

§. 11. Substituamus igitur loco x', x'' et y', y'' suos valores, et cum sit

$$x' = x + a \sin. p,$$
$$y' = y - a \cos. p,$$
$$x'' = x + a \sin. p + b \sin. q,$$
$$y'' = y - a \cos. p - b \cos. q,$$

quatuor noſtrae aequationes ita ſe habebunt:

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = -\tan. p,$$
$$\text{II. } \frac{(A+B)\partial x + B a \partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B a \partial p \sin. p} = -\tan. q,$$
$$\text{III. } \frac{(A+B+C)\partial x + (B+C) a \partial p \cos. p + C b \partial q \cos. q}{(A+B+C)\partial y + (B+C) a \partial p \sin. p + C b \partial q \sin. q} = -\tan. r,$$
$$\text{IV. } y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

vbi ex vltima habetur

$$\partial y = -a \partial p \sin. p - b \partial q \sin. q - c \partial r \sin. r$$

ſicque ſolutio noſtri problematis a reſolutione harum aequationum pendet.

§. 12. Cum ex prima harum aequationum ſit $\partial x = -\partial y \tan. p$, ſubſtituamus hunc valorem in reliquis, vt tantum tres nobis remaneant aequationes, quae erunt:

$$\text{I. } \frac{-(A+B)\partial y \tan. p + B a \partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B a \partial p \sin. p} = -\tan. q,$$
$$\text{II. } \frac{-(A+B+C)\partial y \tan. p + (B+C) a \partial p \cos. p + C b \partial q \cos. q}{(A+B+C)\partial y + (B+C) a \partial p \sin. p + C b \partial q \sin. q} = -\tan. r,$$
$$\text{III. } y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

priores autem duae aequationes euolutae euadent

$$(A+B)\partial y (\tan. q - \tan. p) + B a \partial p (\cos. p + \sin. p \tan. q) = 0,$$
$$(A+B+C)\partial y (\tan. r - \tan. p) + (B+C) a \partial p (\cos. p + \sin. p \tan. r)$$
$$+ C b \partial q (\cos. q + \sin. q \tan. r) = 0,$$

vbi ſi loco ∂y ſcriberemus eius valorem

$$-a \partial p \sin. p - b \partial q \sin. q - c \partial r \sin. r$$

nan-

nanciſceremur duas aequationes inter ternos angulos p, q, r quorum binos per tertium definire oportebit.

§. 13. Quemadmodum autem has duas aequationes vlterius tractari conueniat multo minus patet quam in problemate praecedente, quam ob rem ſuperfluum foret hanc inueſtigationem ad plura corpuscula filo noſtro alligata extendere; ita vt hoc negotium penitus abrumpere cogamur.

DE TRANSFORMATIONE SERIEI DIVERGENTIS

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 \text{ etc.}$$

IN FRACTIONEM CONTINVAM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 11 *Ian.* 1776.

§. 1.

Cum olim indolem huiusmodi ſerierum diuergentium eſſem perſcrutatus, et veram ſummam ſeriei hypergeometricae

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{ etc.}$$

aſſignauiſſem ope transformationis in fractionem continuam, mentionem quoque feci iſtius ſeriei multo latius patentis:

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{ etc.}$$

cuius ſummam inueneram aequari huic fractioni continuae:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\text{ etc.}}}}}}}$$

cuius

cuius rei veritatem ex conuerſione aequationis Riccatianae in fractionem continuam deduxeram. Cum autem haec demonſtratio nimis longe petita videri queat, eandem reductionem hic ex principiis ſimplicioribus ſum traditurus.

§. 2. Primo autem iſtam ſeriem generalem in formam concinniorem contrahi conueniet ponendo $mx = a$ et $nx = b$, vt propoſita ſit iſta ſeries infinita:

$$1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

Praeterea vero vt ſequentes reſolutiones commodius peragi queant, neque tot clauſulis ſit opus, ſtatuam vt ſequitur:

$$a = A,\ a+b = B,\ a+2b = C,\ a+3b = D, \text{ etc.}$$

ſicque habebitur iſta ſeries:

$$1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

cuius ſummam quaeſitam deſignemus littera S, ita vt ſit

$$S = 1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

hinc porro

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + ABCD - etc.}.$$

§. 3. Cum igitur ſit $\frac{b}{a} > 1$, poſtrema aequatio reducatur ad hanc formam:

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{A - AB + ABC - ABCD + etc.}{1 - A + AB - ABC + ABCD\ etc.}.$$

Nunc autem ponamus $\frac{b}{a} = 1 + \frac{A}{P}$, eritque

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + ABCD\ etc.}{1 - B + BC - BCD + BCDE\ etc.},$$

quae expreſſio cum iterum vnitatem ſuperet, ob $B - A = b$, $C - A = 2b$, $D - A = 3b$, etc. ea dabit

$$P = 1 + \frac{b - 2bB + 3bBC - 4bBCD + etc.}{1 - B + BC - BCD + BCDE - etc.}.$$

Ponatur ergo $P = 1 + \frac{b}{Q}$ eritque

$$Q = \frac{1 - B + BC - BCD + BCDE - etc.}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.},$$

vnde deducimus

$$Q = 1 + \frac{B - 2BC + 3BCD - 4BCDE etc.}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.}.$$

Hanc ob rem ponamus nunc $Q = 1 + \frac{B}{R}$, ac prodibit

$$R = \frac{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + etc.}.$$

§. 4. Hic ergo tam in numeratore quam in denominatore iidem coefficientes occurrunt, at litterae maiuſculae in denominatore vno gradu ſunt promotae. Cum igitur ſit $C - B = b$, $D - B = 2b$, $E - B = 3b$, etc. fiet

$$R = 1 + \frac{2b - 2.3bC + 3.4bCD + 4.5bCDE - etc.}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + 5.CDEF - etc.}.$$

Quod ſi ergo ponamus $R = 1 + \frac{2b}{S}$, erit

$$S = \frac{1 - 2C + 3CD - 4CDE + etc.}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + etc.},$$

vbi in denominatore manifeſto occurrunt numeri trigonales, quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$S = 1 + \frac{C - 3CD + 6CDE - 10CDEF + etc.}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + etc.}.$$

Quod ſi ergo ſtatuamus $S = 1 + \frac{C}{T}$, erit

$$T = \frac{1 - 3C + 6CD - 10CDE + 15CDEF - etc.}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}.$$

§. 5. Iſta forma ob $D - C = b$, $E - C = 2b$, $F - C = 3b$, etc. abit in hanc:

$$T = 1 + \frac{3b - 2.6bD + 3.10bDE - 4.15bDEF + etc.}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}.$$

Ponamus $T = 1 + \frac{3b}{U}$, vt fiat

$$U = \frac{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.},$$

vbi in denominatore reperiuntur numeri pyramidales primi ſiue ſummae trigonalium, hincque nanciſcimur:

$U =$

$$U = 1 + \frac{1D - 4DE + 10DEF - 20DEFG + etc.}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.},$$

vbi iam ſupra et infra occurrunt numeri pyramidales. Statuatur porro $U = 1 + \frac{D}{V}$ fietque

$$V = \frac{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}.$$

§. 6. Hinc calculum vt ſupra proſequendo, cum ſit $E - D = b$, $F - D = 2b$, $G - D = 3b$, erit

$$V = 1 + \frac{4b - 2.10bE + 3.20bEF - 4.35bEFG + etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH + etc.}.$$

Sit $V = 1 + \frac{4b}{X}$, vt fiat

$$X = \frac{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$X = 1 + \frac{E - 5EF + 15EFG - 35EFGH + etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + etc.}.$$

Sit $X = 1 + \frac{E}{Y}$ eritque

$$Y = \frac{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGH1 - etc.}.$$

§. 7. Cum igitur ſit $F - E = b$, $G - E = 2b$, $H - E = 3b$, etc. erit

$$Y = 1 + \frac{5b - 2.15b.F + 3.35bFG - 4.70bFGH + etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGH1 - etc.}.$$

Sit nunc $Y = 1 + \frac{5b}{Z}$, vt fiat

$$Z = \frac{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGH1 - etc.}{1 - 10F + 21FG - 56FGH + 126FGH1 - etc.}.$$

Cum igitur initio poſuerimus $\frac{1}{S} = 1 + \frac{A}{P}$, erit ſumma quaeſita $S = \frac{1}{1 + \frac{A}{P}}$; tum vero factae ſunt ſequentes poſitiones:

$$P = 1 + \frac{b}{Q},\ Q = 1 + \frac{B}{R},\ R = 1 + \frac{2b}{S},\ S = 1 + \frac{C}{T},\ T = 1 + \frac{3b}{U},$$
$$U = 1 + \frac{D}{V},\ V = 1 + \frac{4b}{X},\ X = 1 + \frac{E}{Y},\ Y = 1 + \frac{5b}{Z},\ \text{etc.}$$

quibus

quibus valoribus ordine ſubſtitutis oritur iſta fractio continua:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{A}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{B}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{C}{1 + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{D}{1 + \cfrac{4b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

Quod ſi ergo loco litterarum A, B, C, D, etc. valores aſſumtos reſtituamus, vt nobis ſit iſta ſeries diuergens:

$$1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

eius ſumma exprimetur per ſequentem fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + a + \cfrac{b}{1 + \cfrac{2b}{1 + a + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{3b}{1 + a + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{4b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

quae eſt eadem forma quam olim dederam.

§. 8.

§. 8. Haec transformatio eo magis eſt notatu digna, quod tutiſſimam ac fortaſſe vnicam nobis viam aperit, valorem ſeriei diuergentis vero proxime ſaltem determinandi. Si enim fractio continua more ſolito in fractiones ſimplices reſoluatur 1, $\frac{1}{1+a}$, $\frac{1+b}{1+a+b}$, etc. eae alternatim ſunt maiores et minores quam valor ſeriei diuergentis, et continuo propius ad iſtum valorem accedunt. Tum vero etiam ſingularia olim expoſui artificia, quae multo promptius ad verum valorem deducunt.

§. 9. Praeterea vero etiam notaſſe iuuabit, talem fractionem continuam:

$$1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{1+\text{etc.}}}}}$$

in genere ſatis commode ad dimidium partium numerum redigi poſſe. Poſito enim eius valore $= S$, eum ita repraeſentare licebit:

$$S = 1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{P}}, \quad P = 1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{Q}}, \quad Q = 1+\cfrac{\varepsilon}{1+\cfrac{\zeta}{R}}, \text{ etc.}$$

Iam prima harum formularum erit

$$S = 1+\frac{\alpha P}{P+\beta} = 1+\alpha-\frac{\alpha\beta}{\beta+P},$$

ſecunda deinde formula dat

$$P = 1+\gamma\frac{Q}{Q+\delta} = 1+\gamma-\gamma\frac{\delta}{\delta+Q},$$

eodem modo tertia praebet

$$Q = 1 + \varepsilon\,\frac{R}{R+\zeta} = 1 + \varepsilon - \varepsilon\,\frac{\zeta}{\zeta+R}, \text{ etc.}$$

Hi igitur valores succeſſiue ſubſtituti, producent hanc nouam fractionem continuam:

$$S = 1 + \alpha - \cfrac{\alpha\beta}{1+\beta+\gamma-\gamma\delta - \cfrac{\gamma\delta+\varepsilon-\varepsilon\zeta}{1+\delta+\varepsilon-\varepsilon\zeta - \cfrac{\varepsilon\zeta+\eta-\eta\theta}{1+\zeta+\eta-\eta\theta - \cfrac{\eta\theta+\iota-\iota\varkappa}{1+\theta+\iota-\iota\varkappa - \text{etc.}}}}}$$

§. 10. Cum igitur noſtro caſu ſeries diuergens

$$S = 1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

perducta ſit ad iſtam fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1+a - \cfrac{a}{1+b - \cfrac{b}{1+a+b - \cfrac{a+b}{1+2b - \cfrac{2b}{1+a+2b - \cfrac{a+2b}{1+3b - \cfrac{3b}{1+a+3b - \cfrac{a+3b}{1+\text{etc.}}}}}}}}}$$

ſumamus hic

$$\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = a+b,\ \delta = 2b,\ \varepsilon = a+2b, \text{ etc.}$$

eritque

$$S =$$

$$S = 1 + \cfrac{a - ab}{1 + a + 2b - \cfrac{2b(a+b)}{1 + a + 4b - \cfrac{3b(a+2b)}{1 + a + 6b - \cfrac{4b(a+3b)}{1 + a + \text{etc.}}}}}$$

Appendix.

De fractione continua Brouncheriana.

§. 11. Cum olim multum fuiſſem occupatus in Analyſi indaganda, quae *Brouncherum* ad iſtam ſingularem fractionem perduxerit, quandoquidem mihi haud probabile eſt viſum, eum per tot ambages, quales a *Walliſio* commemorantur, eo fuiſſe perductum, tandem mihi quidem ſatis dilucide oſtendiſſe ſum viſus, Brouncherum hanc formam ex ſerie Leibniziana $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. quam magnus *Gregorius*, iam ante inuenerat, deduxiſſe potius quam ex interpolatione ſeriei $1, \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, etc. quemadmodum Walliſius ſuſpicabatur, ſi quidem conſideratio illius ſeriei per ratiocinium ſatis planum ad formam Brouncherianam manuducit.

§. 12. Haec obſeruatio autem nunc quidem eo maiore attentione digna videtur, poſtquam Cel. *Dan. Bernoullius* memoriam formae Brouncherianae renouare haud ſit dedignatus. Quoniam igitur non ita pridem facilem methodum expoſui iſtam formam ex ſerie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. deriuandi, Geometris haud ingratum fore arbitror, ſi methodum inuerſam in medium protulero, cuius ope formulam Brouncherianam viciſſim ad ſeriem Leibnizianam reducere licet.

§. 13. Considerabo igitur fractionem istam continuam quasi eius valor nondum esset cognitus, statuendo:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}}$$

quam per partes sequenti modo repraesento:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-1+P}}, \quad P = 3+\cfrac{9}{-3+Q}, \quad Q = 5+\cfrac{25}{-5+R}, \quad R = 7+\cfrac{49}{-7+S}, \text{ etc.}$$

Ex his enim partibus debite coniunctis ipsa forma proposita manifesto enascitur.

§. 14. Singulas igitur has partes seorsim euoluamus, ac prima quidem reducta ad fractionem simplicem praebet $S = \frac{P-1}{P}$, ideoque $S = 1 - \frac{1}{P}$, secunda vero erit $\frac{3Q}{Q-3}$, vnde fit $\frac{1}{P} = \frac{Q-3}{3Q}$, siue $\frac{1}{P} = \frac{1}{3} - \frac{1}{Q}$, simili modo pars tertia dat $Q = \frac{5R}{R-5}$, ideoque $\frac{1}{Q} = \frac{1}{5} - \frac{1}{R}$; eodem modo ex sequentibus partibus nanciscemur $\frac{1}{R} = \frac{1}{7} - \frac{1}{S}$, $\frac{1}{S} = \frac{1}{9} - \frac{1}{T}$, etc. Quare si isti valores successiue substituantur, obtinebimus hanc expressionem:

$$S = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{etc.}$$

ita ita vt nunc certi simus esse $S = \frac{\pi}{4}$.

§. 15. Simili modo etiam aliarum huiusmodi fractionum continuarum valorem inuestigare licebit. Veluti si proposita fuerit

fuerit haec forma:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}}$$

ea fequenti modo in membra deſtribuatur:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-1+P}}, \quad P = \cfrac{2+4}{-2+Q}, \quad Q = \cfrac{3+9}{-3+R}, \quad R = \cfrac{4+16}{-4+S}, \text{ etc.}$$

his enim ſingulis partibus euolutis reperietur:

$$S = 1 - \tfrac{1}{P}, \; \tfrac{1}{P} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{Q}, \; \tfrac{1}{Q} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{R}, \; \tfrac{1}{R} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{S}, \text{ etc.}$$

vnde ſequitur fore

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = l\,2.$$

Haec igitur methodus haud parum in receſſu habere videtur.

DE SVMMATIONE SERIERVM IN QVIBVS TERMINORVM SIGNA ALTERNANTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 22 *Febr.* 1776.

Cum olim eſſem perſcrutatus quemadmodum ex dato termino generali cuiusque ſeriei eius ſummam definiri conueniat, caſus quo termini ſeriei ſignis alternantibus $+$ et $-$ ſunt affecti, non parum moleſtiae faceſſebat, ac demum poſt longas ambages mihi licuit ad formulam ſatis ſimplicem pertingere. Hac re igitur accuratius perpenſa modum inueni qui directe ad iſtas formulas perducit, quem igitur hoc loco exponere conſtitui, quandoquidem aptus videtur hanc partem Analyſeos vlterius perficiendi.

Problema I.

Sit X *functio quaecunque ipſius* x, *quae, dum loco* x *ſucceſſiue ſcribuntur valores* $x+1$, $x+2$, $x+3$, *etc. induat hos valores:* X', X'', X''', *etc. propoſitaque ſit iſta ſeries infinita:* $X - X' + X'' - X''' + X'''' -$ etc. *in infinitum* $= S$, *eius ſummam* S *inueſtigare.*

Solutio

Solutio.

§. 1. Cum igitur S quoque ſit certa functio ipſius x, abeat ea in S', ſi loco x ſcribatur $x+1$, ac perſpicuum eſt fore $S' = X' - X'' + X''' - X'''' + X''''' -$ etc. in infinitum, cui ergo ſeriei ſi propoſita addatur, orietur iſta aequatio $S + S' = X$, ex qua valorem functionis quaeſitae S inueſtigari oportet.

§. 2. Quoniam igitur functio S' naſcitur ex functione S, dum loco x ſcribitur $x+1$, ex natura differentialium erit

$$S' = S + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \partial s}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} + \frac{\partial^5 s}{120\,\partial x^5} + \text{etc.}$$

vnde nobis reſoluenda proponitur iſta aequatio:

$$2S + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \partial s}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} + = X,$$

vbi euidens eſt valorem ipſius S per ſeriem infinitam expreſſum iri, cuius primus terminus ſit $S = \frac{1}{2}X$; ipſam vero hanc ſeriem huiusmodi formam eſſe habituram:

$$S = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial x}{\partial x} + \frac{\beta\,\partial \partial x}{\partial x^2} + \frac{\gamma\,\partial^3 x}{\partial x^3} + \frac{\delta\,\partial^4 x}{\partial x^4} + \text{etc.}$$

§. 3. Subſtituamus igitur hanc ſeriem in noſtra aequatione, et pro eius ſingulis partibus erit vt ſequitur:

$$\begin{array}{lcccccccc}
2S & = X + \frac{2\alpha\,\partial x}{\partial x} + \frac{2\beta\,\partial\partial x}{\partial x^2} + \frac{2\gamma\,\partial^3 x}{\partial x^3} + \frac{2\delta\,\partial^4 x}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon\,\partial^5 x}{\partial x^5} + \frac{2\zeta\,\partial^6 x}{\partial x^6} \\
\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{1}{2}\ldots + \alpha\ldots + \beta\ldots + \gamma\ldots + \delta\ldots + \varepsilon\ldots \\
\frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2} & = + \frac{1}{4}\ldots + \frac{1}{2}\alpha\ldots + \frac{1}{2}\beta\ldots + \frac{1}{2}\gamma\ldots + \frac{1}{2}\delta\ldots \\
\frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} & = + \frac{1}{12}\ldots + \frac{1}{6}\alpha\ldots + \frac{1}{6}\beta\ldots + \frac{1}{6}\gamma\ldots \\
\frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} & = + \frac{1}{48}\ldots + \frac{1}{24}\beta\ldots + \frac{1}{24}\beta\ldots \\
\frac{\partial^5 s}{120\,\partial x^5} & = + \frac{1}{240}\ldots + \frac{1}{120}\alpha\ldots \\
\frac{\partial^6 s}{720\,\partial x^6} & = + \frac{1}{1440}\ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

qua-

quarum ſerierum ſumma quia aequari debet functioni X, hinc ſequentes orientur aequalitates:

$$2\alpha + \tfrac{1}{2} = 0$$
$$2\beta + \alpha + \tfrac{1}{4} = 0$$
$$2\gamma + \beta + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{12} = 0$$
$$2\delta + \gamma + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{48} = 0$$
$$2\varepsilon + \delta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{240} = 0$$
$$2\zeta + \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{24}\beta + \tfrac{1}{120}\alpha + \tfrac{1}{1344} = 0.$$
etc.

§. 4. Quanquam hae formulae iam ſufficiunt ad valores ſingularum litterarum α, β, γ, δ, etc. tamen hic labor nimis fieret moleſtus propter continuo plures fractiones in vnam ſummam colligendas, praecipue autem quoniam, vt mox videbimus, harum litterarum alternae ſponte in nihilum abeunt; quamobrem aliam viam inire conueniet veros valores harum litterarum expeditius determinandi, quae in hoc conſiſtit, vt euoluamus ſequentis ſeriei ſummationem:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta t t + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

Quod ſi enim huius ſeriei ſummam s aſſignare valuerimus, ex ea viciſſim valores ſingulorum coefficientium α, β, γ, δ, etc. inueſtigare licebit; vbi probe notetur, hos coefficientes prorſus conuenire cum iis qui in praecedentem aequationem ingrediuntur.

§. 5. Hac iam ſerie conſtituta ex inuentis relationibus inter litteras α, β, γ, δ, etc. ſequentes formemus ſeries:

$$2s = 1$$

$$2s = 1 + 2\alpha t + 2\beta t^2 + 2\gamma t^3 + 2\delta t^4 + 2\varepsilon t^5 + 2\zeta t^6 + 2\eta t^7 + 2\,1\,t^8 + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
s\,t &= \tfrac{1}{2}t + \alpha.. + \beta.. + \gamma.. + \delta.. + \varepsilon.. + \zeta.. + \eta..\\
\tfrac{1}{2}s\,t\,t &= + \tfrac{1}{4}.. + \tfrac{1}{2}\alpha.. + \tfrac{1}{2}\beta.. + \tfrac{1}{2}\gamma.. + \tfrac{1}{2}\delta.. + \tfrac{1}{2}\varepsilon.. + \tfrac{1}{2}\zeta..\\
\tfrac{1}{6}s\,t^3 &= + \tfrac{1}{12}... + \tfrac{1}{6}\alpha.. + \tfrac{1}{6}\beta.. + \tfrac{1}{6}\gamma.. + \tfrac{1}{6}\delta.. + \tfrac{1}{6}\varepsilon..\\
\tfrac{1}{24}s\,t^4 &= + \tfrac{1}{48}.. + \tfrac{1}{24}\alpha.. + \tfrac{1}{24}\beta.. + \tfrac{1}{24}\gamma.. + \tfrac{1}{24}\delta..\\
\tfrac{1}{120}s\,t^5 &= + \tfrac{1}{240}.. + \tfrac{1}{120}\alpha.. + \tfrac{1}{120}\beta.. + \tfrac{1}{120}\gamma..\\
\tfrac{1}{720}s\,t^6 &= + \tfrac{1}{1440}.. + \tfrac{1}{720}\alpha.. + \tfrac{1}{720}\beta..\\
\text{etc.} &\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Hae igitur ſeries in vnam ſummam collectae ob relationes ſupra §. 3. aſſignatas praebebunt hanc aequationem:

$$s\,(2 + t + \tfrac{1}{2}\,t\,t + \tfrac{1}{6}\,t^3 + \tfrac{1}{24}\,t^4 + \tfrac{1}{120}\,t^5 + \tfrac{1}{720}\,t^6 + \text{etc.}) = 1.$$

§. 6. Cum igitur, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ſit $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t\,t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \text{etc.}$ euidens eſt aequationem inuentam reduci ad hanc formam finitam: $s\,(1 + e^t) = 1$, vnde totum negotium huc redit, vt valor litterae s per ſeriem exprimatur, cuius ſinguli termini ſecundum poteſtates litterae t progrediantur; tum enim ſemper coefficientes iſtius ſeriei cum ſupra aſſumtis α, β, γ, δ congruant neceſſe eſt. Quamobrem in hoc nobis erit incumbendum, quemadmodum iſtam aequationem $s\,(1 + e^t) = 1$ aptiſſime in ſeriem infinitam conuertamus.

§. 7. Ante omnia igitur hanc aequationem a quantitate exponentiali e^t liberemus, et cum ſit $e^t = \frac{1}{s} - 1$, erit $t = l\frac{1-s}{s}$, hincque differentiando $\partial t = \frac{-\partial s}{s(1-s)}$. Ponamus hic $s = \frac{1}{2} + v$, et iſta aequatio fiet

$$\partial t = \frac{-\partial v}{(\frac{1}{2}+v)(\frac{1}{2}-v)} = \frac{+\partial v}{v\,v - \frac{1}{4}}.$$

Nunc autem v aequabitur isti seriei:

$$\alpha t + \beta t t + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

cuius coefficientes quaerimus.

§. 8. Aequationi inuentae tribuamus hanc formam: $v v - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, ex qua facile intelligitur, cum primus terminus seriei pro v inuestigandae debeat esse αt, sequentes terminos tantum per potestates impares ipsius t esse ascensuros, quam ob rem pro v constituamus sequentem seriem:

$$v = A t + B t^3 + C t^5 + D t^7 + E t^9 + \text{etc.}$$

eritque hinc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A + 3 B t t + 5 C t^4 + 7 D t^6 + 9 E t^8 + 11 F t^{10} + 13 G t^{12} + \text{etc.}$$

pro parte vero aequationis nostrae sinistra erit

$$\begin{aligned} v v - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4} &+ AA t t + 2AB t^4 + 2AC t^6 + 2AD t^8 + 2AE t^{10} + 2AF t^{12} + \text{etc.} \\ &+ BB \quad + 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.} \\ &+ CC \quad + 2CD + \text{etc.} \end{aligned}$$

ex quarum serierum aequalitate statim concluditur fore: $A = -\frac{1}{4} = a$, tum vero reliqui termini praebebunt has relationes:

$$\begin{aligned} 3B &= AA, \\ 5C &= 2AB, \\ 7D &= 2AC + BB, \\ 9E &= 2AD + 2BC, \\ 11F &= 2AE + 2BD + CC, \\ 13G &= 2AF + 2BE + 2CD, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

vnde patet, cum valor ipsius A sit negatiuus $= -\frac{1}{4}$, reliquarum valores alternatim fore positiuos et negatiuos.

§. 9.

§. 9. Hac iam ſerie cum primum inuenta comparata colligitur fore:

$$\alpha = A, \beta = 0, \gamma = B, \delta = 0, \varepsilon = C, \zeta = 0, \eta = D, \text{ etc.}$$

ita vt alternae litterarum graecarum ſponte euaneſcant, vt iam ſupra innuimus, reliquarum vero determinatio per has nouas formulas multo facilius et promptius expediatur quam per relationes initio inuentas. Ante enim verbi gratia valores ipſius ε per quinque fractiones colligere oportebat, dum nunc littera C illi aequalis vnico membro exprimitur. His igitur nouis litteris A, B, C, D introductis ſummatio ſeriei propoſitae ita contrahetur vt ſit

$$S = \tfrac{1}{2} X + \frac{A \partial x}{\partial x} + \frac{B \partial^3 x}{\partial x^3} + \frac{C \partial^5 x}{\partial x^5} + \frac{D \partial^7 x}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

§. 10. Quo autem inueſtigatio harum litterarum A, B, C, D, etc. facilior reddatur, quoniam $A = -\frac{1}{4}$ et ſequentium litterarum valores euadunt alternatim poſitiui et negatiui, denuo nouas litteras in calculum introducamus, ponendo

$$A = -\frac{\mathfrak{A}}{4}, \quad B = +\frac{\mathfrak{B}}{4^2}, \quad C = -\frac{\mathfrak{C}}{4^3}, \quad D = +\frac{\mathfrak{D}}{4^4}, \quad E = -\frac{\mathfrak{E}}{4^5}, \text{ etc.}$$

et nunc determinationes harum nouarum litterarum ſequenti modo ſe habebunt.

$$\mathfrak{A} = 1,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{3},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{5},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{7},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{9},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{11},$$

$$\mathfrak{G} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{13},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{15},$$

etc.

atque ex his litteris ſummatio noſtra ita ſe habebit:

$$S = \tfrac{1}{2} X - \frac{\mathfrak{A} \partial x}{4 \partial x^2} + \frac{\mathfrak{B} \partial^3 x}{4^2 \partial x^3} - \frac{\mathfrak{C} \partial^5 x}{4^3 \partial x^5} + \frac{\mathfrak{D} \partial^7 x}{4^4 \partial x^7} - \text{etc.}$$

§. 11. Harum igitur litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores numerice euoluamus et calculo non admodum moleſto expedito reperiemus ſequentes valores:

$$\mathfrak{A} = 1, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{C} = \frac{2}{3.5}, \quad \mathfrak{D} = \frac{17}{3^2.5.7}, \quad \mathfrak{E} = \frac{62}{3^2.5.7.9},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1382}{3^4.5^2...11}, \quad \mathfrak{G} = \frac{21844}{3^5.5^2.7.11.13}.$$

Vbi numerator penultimi termini $1382 = 2.691$ commonefacere poteſt, hos numeros in arcto nexu cum numeris Bernoullianis dictis conſiſtere.

§. 12. Deſignemus igitur numeros iſtos Bernoullianos litteris latinis minuſculis a, b, c, d, etc. ita vt ſit

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{3}{3}, \quad e = \frac{5}{3}, \quad f = \frac{691}{105}, \quad g = \frac{35}{1}, \quad h = \frac{3617}{15},$$

quemadmodum hos numeros in Introductione mea in Analyſin Infinitorum, pag. 131. exhibui, atque examine inſtituto valores noſtrarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ſequenti modo exprimi poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{2^1(2^2-1)}{2.3}.a \qquad \mathfrak{F} = \frac{2^{11}(2^{12}-1)}{2...13}.f$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2^3(2^4-1)}{2.3.4.5}.b \qquad \mathfrak{G} = \frac{2^{13}(2^{14}-1)}{2...15}.g$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2^5(2^6-1)}{2...7}.c \qquad \mathfrak{H} = \frac{2^{15}(2^{16}-1)}{2...17}.h$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2^7(2^8-1)}{2...9}.d \qquad \mathfrak{J} = \frac{2^{17}(2^{18}-1)}{2....19}.i$$

$$\mathfrak{E} = \frac{2^9(2^{10}-1)}{2....11}.e \qquad \mathfrak{K} = \frac{2^{19}(2^{20}-1)}{2....21}.k$$

etc.

§. 13. In gratiam eorum, quibus non vacat iſtos numeros Bernoullianos ex mea Introductione depromere, eos hic, quousque equidem eos ſum proſecutus, hic ſubiungam:

$a = 1,$

$a = 1$,
$b = \frac{1}{3}$,
$c = \frac{1}{3}$,
$d = \frac{3}{3}$,
$e = \frac{5}{3}$,
$f = \frac{691}{105}$,
$g = \frac{35}{1}$,
$h = \frac{3617}{15}$,
$i = \frac{43867}{21}$,
$k = \frac{1222277}{55}$,
$l = \frac{854513}{3}$,
$m = \frac{1181820455}{273}$,
$n = \frac{76977927}{1}$,
$o = \frac{23749461029}{15}$,
$p = \frac{8615841276005}{231}$,
$q = \frac{84902531453387}{85}$,
$r = \frac{7021203502829}{3}$.

§. 14. His igitur numeris Bernoullianis in ſubſidium vocatis ſumma noſtrae ſeriei propoſitae

$$S = X - X' + X'' - X''' + X'''' - \text{etc.}$$

in infinitum ſequenti modo exprimetur:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2.3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2\ldots7}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^5 X}{\partial x^5}$$
$$+ \frac{(2^8-1)}{2\ldots9}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\partial^7 X}{\partial x^7} - \frac{(2^{10}-1)}{2\ldots11}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{\partial^9 X}{\partial x^9} + \frac{(2^{12}-1)}{2\ldots13}\cdot\frac{f}{2}\cdot\frac{\partial^{11} X}{\partial x^{11}} - \text{etc.}$$

ſicque Problemati noſtro penitus ſatisfecimus.

Alia ſolutio Problematis propoſiti.

§. 15. Cum ſumma quaeſita S ſit functio ipſius x, abeat ea in T, ſi loco x ſcribatur $x + \frac{1}{2}$, atque viciſſim ex hac functione T obtinebitur ipſa ſumma S, ſi loco x ſcribatur $x - \frac{1}{2}$, ita vt, quando inuenerimus valorem litterae T, ex eo etiam ipſa ſumma quaeſita S innoteſcat. Tum vero manifeſtum eſt, ſi in hac functione T loco x ſcribatur $x + \frac{1}{2}$, tum proditurum eſſe valorem litterae S'. Hinc igitur ex natura differentialium habebimus

$$S = T - \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} - \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \text{etc.}$$

Quare cum ſolutio problematis contineatur in hac aequatione: $S + S' = X$; his valoribus ſubſtitutis emergit iſta aequatio:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} X.$$

§. 16. Hinc ſtatim manifeſtum eſt ſeriei pro T aſſumendae hanc formam tribui debere:

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

hoc igitur valore in noſtram aequationem introducto habebimus

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \frac{\delta\,\partial^8 X}{\partial x^8} + \frac{\varepsilon\,\partial^{10} X}{\partial x^{10}} + \frac{\zeta\,\partial^{12} X}{\partial x^{12}} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} = \frac{1}{2.4.2} + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\gamma}{4.2} + \frac{\delta}{4.2} + \frac{\varepsilon}{4.2} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} = + \frac{1}{2.16.24} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{\beta}{16.24} + \frac{\gamma}{16.24} + \frac{\delta}{16.24} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} = + \frac{1}{2.64.720} + \frac{\alpha}{64.720} + \frac{\beta}{64.720} + \frac{\gamma}{64.720} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Quia igitur ſumma harum ſerierum aequari debet ipſi $\frac{1}{2} X$, hinc naſcentur ſequentes determinationes:

$$\alpha + \frac{1}{2.4.2} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{1}{2.16.24} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{1}{2.64.720} = 0,$$

$$\delta + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{24.1\ldots4} + \frac{\alpha}{2^6.1\ldots6} + \frac{1}{2.256.5040} = 0,$$

$$\varepsilon + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{24.1\ldots4} + \frac{\beta}{2^6.1\ldots6} + \frac{\alpha}{2^8.1\ldots8} + \frac{1}{2.2^{10}.1\ldots10} = 0.$$

etc.

§. 17. Quanquam haud difficile foret hinc valores α, β, γ, δ, etc. elicere, ſiquidem prodiret $\alpha = -\frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{5}{768}$; tamen

tamen ſimili modo, quo ſupra vſi ſumus, in aliam legem, qua iſti valores progrediuntur, inquiramus. Hunc in finem ponamus

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t t + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.}$$

vnde formemus ſequentes ſeries:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t t + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}$$

$$\frac{s t t}{2^2 . 1 . 2} = \frac{1}{2 . 2^2 . 1 . 2} + \frac{\alpha}{2^2 . 1 . 2} + \frac{\beta}{2^2 . 1 . 2} + \frac{\gamma}{2^2 . 1 . 2} + \frac{\delta}{2^2 . 1 . 2} + \frac{\varepsilon}{2^2 . 1 . 2} + \frac{\zeta}{2^2 . 1 . 2} + \text{etc.}$$

$$\frac{s t^4}{2^4 . 1 . 4} = \frac{1}{2 . 2^4 . 1 . . 4} + \frac{\alpha}{2^4 . 1 . . 4} + \frac{\beta}{2^4 . 1 . . . 4} + \frac{\gamma}{2^4 . 1 . . . 4} + \frac{\delta}{2^4 . 1 . . . 4} + \frac{\varepsilon}{2^4 . 1 . . . 4} + \text{etc.}$$

$$\frac{s t^6}{2^6 . 1 . . . 6} = \frac{1}{2 . 2^6 . 1 . . 6} + \frac{\alpha}{2^6 . 1 . . . 6} + \frac{\beta}{2^6 . 1 . . . 6} + \frac{\gamma}{2^6 . 1 . . . 6} + \frac{\delta}{2^6 . 1 . . . 6} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Hae igitur ſeries in vnam ſummam collectae, ob ſuperiores litterarum α, β, γ, etc., determinationes, nobis ſuppeditabunt hanc aequationem:

$$s \left(1 + \frac{t t}{2^2 . 1 . 2} + \frac{t^4}{2^4 . 1 . . 4} + \frac{t^6}{2^6 . 1 . . . 6} + \frac{t^8}{2^8 . 1 . . . 8} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Sicque totum negotium huc eſt reductum, vt valor litterae s per idoneam ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t procedentem exprimatur. Vbi tantum notetur, poſito $t = 0$ fieri debere $s = \frac{1}{2}$.

§. 18. Cum iam, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ſit

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1 . 1} + \frac{t t}{2^2 . 1 . 2} + \frac{t^3}{2^3 . 1 . . 3} + \frac{t^4}{2^4 . 1 . . 4} + \frac{t^5}{2^5 . 1 . . . 5} + \text{etc. et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1 . 1} + \frac{t t}{2^2 . 1 . 2} - \frac{t^3}{2^3 . 1 . . 3} + \frac{t^4}{2^4 . 1 . . 4} - \frac{t^5}{2^5 . 1 . . . 5} + \text{etc.}$$

harum duarum ſierum ſemi-ſumma nobis praebebit

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{t t}{2^2 . 1 . 2} + \frac{t^4}{2^4 . 1 . . . 4} + \frac{t^6}{2^6 . 1 . . . 6} + \text{etc.},$$

hinc

hinc patet noſtram aequationem futuram eſſe $s(e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t})=1$, vnde valorem ipſius s per ſeriem euolui oportet.

§. 19. Ex iſta aequatione igitur deducimus ſtatim

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s},$$

quae differentiata et bis ſumta praebet

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=-\frac{2\partial s}{s s \partial t^2},$$

quarum aequalitatum ſumma dat

$$2e^{\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}-\frac{2\partial s}{s s \partial t};$$

differentia vero

$$2e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}+\frac{2\partial s}{s s \partial t};$$

harum autem productum praebet

$$4=\frac{1}{s s}-\frac{4\partial s^2}{s^4 \partial t^2} \text{ ſiue } \frac{4\partial s^2}{\partial t^2}=s s-4s^4.$$

Differentietur iam iſta aequatio denuo, ſumto ∂t conſtante, ac habebimus $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}=s-8s^3$, ſiue $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}+8s^3-s=0$.

§. 20. Pro hac aequatione reſoluenda ſtatuamus vti ſupra aſſumſimus

$$s=\frac{1}{2}+\alpha t t+\beta t^4+\gamma t^6+\delta t^8+\text{ etc.}$$

vnde fit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2}=1\cdot 2\alpha+3\cdot 4\beta t t+5\cdot 6\gamma t^4+7\cdot 8\delta t^6+9\cdot 10\varepsilon t^8+\text{ etc.}$$

Deinde ob $2s=1+2\alpha t t+2\beta t^4+2\gamma t^6+2\delta t^8+$ etc. erit cubum ſumendo

$$8s^3 = 1 + 6\alpha tt + 6\beta t^4 + 6\gamma t^6 + 6\delta t^8 + 6\varepsilon t^{10} + 6\zeta t^{12} + \text{etc.}$$
$$+ 12\alpha^2 + 24\alpha\beta + 24\alpha\gamma + 24\alpha\delta + 24\alpha\varepsilon + \text{etc.}$$
$$+ 8\alpha^3 + 12\beta\beta + 24\beta\gamma + 24\beta\delta + \text{etc.}$$
$$+ 24\alpha\alpha\beta + 24\alpha\alpha\gamma + 12\gamma\gamma + \text{etc.}$$
$$+ 24\alpha\beta\beta + 24\alpha\alpha\delta + \text{etc.}$$
$$+ 48\alpha\beta\gamma + \text{etc.}$$
$$+ 8\beta^3 + \text{etc.}$$

quae ſeries aequalis eſſe debet $s - \frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}$.

§. 21. Haec igitur ſeries aequalis ſtatui debet iſti:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}$$
$$-\tfrac{4\partial\partial s}{\partial t^2} = -8\alpha - 4\cdot3\cdot4\beta - 4\cdot5\cdot6\gamma - 4\cdot7\cdot8\delta - 4\cdot9\cdot10\varepsilon - 4\cdot11\cdot12\zeta - \text{etc.}$$

vnde deducuntur ſequentes determinationes:

4. 1. $2\alpha + \frac{1}{2} = 0$;
4. 3. $4\beta + 5\alpha = 0$;
4. 5. $6\gamma + 5\beta + 12\alpha^2 = 0$;
4. 7. $8\delta + 5\gamma + 24\alpha\beta + 8\alpha^3 = 0$;
4. 9. $10\varepsilon + 5\delta + 24\alpha\gamma + 12\beta\beta + 24\alpha\alpha\beta = 0$.
etc.

§. 22. Quoniam vero hae relationes multo magis ſunt complicatae quam eae ad quas primo ſumus perducti, iſtis potius inhaereamus earumque euolutionem ſequenti modo ſublevemus. Ponamus ſcilicet

$$\alpha = -\tfrac{A}{2^3},\ \beta = +\tfrac{B}{2^5},\ \gamma = -\tfrac{C}{2^7},\ \delta = +\tfrac{D}{2^9},\ \varepsilon = -\tfrac{E}{2^{11}},\ \text{etc.}$$

vnde ſummatio noſtra induet hanc formam:

$$T = \tfrac{1}{2}X - \tfrac{A}{2^3}\cdot\frac{\partial\partial x}{\partial x^2} + \tfrac{B}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} - \tfrac{C}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 x}{\partial x^6} + \tfrac{D}{2^9}\cdot\frac{\partial^8 x}{\partial x^8} - \text{etc.}$$

ac relationes pro his nouis litteris sequenti modo se habebunt:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2};$$
$$B = \frac{A}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \ldots 4};$$
$$C = \frac{B}{1 \cdot 2} - \frac{A}{1 \ldots 4} + \frac{1}{1 \ldots 6};$$
$$D = \frac{C}{1 \cdot 2} - \frac{B}{1 \ldots 4} + \frac{A}{1 \ldots 6} - \frac{1}{1 \ldots 8};$$
$$E = \frac{D}{1 \cdot 2} - \frac{C}{1 \ldots 4} + \frac{B}{1 \ldots 6} - \frac{A}{1 \ldots 8} + \frac{1}{1 \ldots 10}.$$

etc. etc.

§. 23. Quo calculum istarum litterarum magis contrahamus atque adeo totum negotium ad numeros integros reducamus, ponamus porro $A = \frac{a}{1 \cdot 2}$, $B = \frac{b}{1 \ldots 4}$, $C = \frac{c}{1 \ldots 6}$, etc. vt nostra summatio fiat

$$T = \tfrac{1}{2} X - \frac{a}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} \frac{\partial \partial x}{\partial x^2} + \frac{b}{2^5 \cdot 1 \ldots 4} \frac{\partial^4 x}{\partial x^4} - \frac{c}{2^7 \cdot 1 \ldots 6} \frac{\partial^6 x}{\partial x^6} + \text{etc.}$$

et nunc istae nouae litterae per sequentes formulas commodissime determinabuntur:

$a = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$, siue $a = 1$;

$b = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,

siue $b = 6a - 1 = 5$;

$c = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} b - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a + \frac{6 \ldots 1}{1 \ldots 6}$,

siue $c = 15\,b - 15\,a + 1 = 61$;

$d = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} c - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b + \frac{8 \ldots 3}{1 \ldots 6} a - \frac{8 \ldots 1}{1 \ldots 8}$,

siue $d = 28\,c - 70\,b + 28\,a - 1 = 1385$;

$e = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c + \frac{10 \ldots 5}{1 \ldots 6} b - \frac{10 \ldots 3}{1 \ldots 8} a + \frac{10 \ldots 1}{1 \ldots 10}$,

siue $e = 45\,d - 210\,c + 210\,b - 45\,a + 1 = 50521$;

$f = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} e - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \frac{12 \ldots 7}{1 \ldots 6} c - \frac{12 \ldots 5}{1 \ldots 8} b + \frac{12 \ldots 3}{1 \ldots 10} a - \frac{12 \ldots 1}{1 \ldots 12}$,

siue $f = 66 \cdot e - 495 \cdot d + 924 \cdot c - 495 \cdot b + 66 \cdot a - 1$;

etc.

Mani-

Manifeſtum autem eſt coefficientes harum formularum congruere cum iis qui in poteſtatibus binomii occurrunt, ſi modo alterni omittantur.

§. 24. Valoribus igitur harum litterarum a, b, c, d inuentis ſeries ante allata dabit valorem litterae T, qui quouis caſu erit certa functio ipſius x, ex qua, ſi loco x ſcribatur $x - \frac{1}{2}$, orietur ſumma ſeriei propoſitae S. Veluti ſi fuerit $X = x^4$, haecque ſeries ſummanda proponatur:

$$S = x^4 - (x+1)^4 + (x+2)^4 - (x+3)^4 + (x+4)^4 - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial\partial x}{\partial x^2} = 4 \cdot 3\, x\, x$ et $\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} = 4.3.2.1$, altiora vero differentialia euaneſcentia, erit

$$T = \tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{3}{4} x\, x + \tfrac{3}{32}, \text{ hincque}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2})^4 - \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{32}.$$

Hinc ergo ſumto $x = 1$, vt ſeries ſummanda ſit

$$S = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.}$$

reperietur $S = 0$, vti aliunde conſtat. Alia exempla non ſubiungimus, quoniam olim iam copioſe ſunt tractata.

Problema II.

Si X vt ante fuerit functio quaecunque ipſius x, *ex qua, dum loco* x *ordine ſcribantur valores* $x+1$, $x+2$, $x+3$, etc. *naſcantur functiones* X', X'', X''', *inuenire ſummam huius ſeriei in infinitum excurrentis*:

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + n^{x+4} X'''' - \text{etc.}$$

Solutio.

§. 25. Ponatur huius ſeriei ſumma quaeſita $n^x S$, vt ſit

$$S = X - n X' + n^2 X'' - n^3 X''' + n^4 X'''' - \text{etc.}$$

Hic iam loco x ſcribatur $x+1$, ac reperietur

$$S' = X' - nX'' + n^2 X''' - n^4 X'''' + \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in n et priori addita praebet $S + nS' = X$. Quare cum ſit

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

habebitur iſta aequatio:

$$(1+n)S + \frac{n\partial S}{\partial x} + \frac{n\partial\partial S}{2\partial x^2} + \frac{n\partial^3 \varepsilon}{6\partial x^3} + \frac{n\partial^4 S}{24\partial x^4} + \text{etc.} = X,$$

ex qua valorem litterae S erui oportet.

§. 26. Statuamus ergo pro S hanc ſeriem:

$$S = \alpha X + \frac{\beta\partial x}{\partial x} + \frac{\gamma\partial\partial x}{\partial x^2} + \frac{\delta\partial^3 x}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

et factis ſingulis ſubſtitutionibus obtinebimus:

$$(1+n)S = (1+n)\alpha X + (1+n)\frac{\beta\partial x}{\partial x} + (1+n)\frac{\gamma\partial\partial x}{\partial x^2} + (1+n)\frac{\delta\partial^3 x}{\partial x^3} + (1+n)\frac{\varepsilon\partial^4 x}{\partial x^4}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
\frac{n\partial S}{\partial x} = & & n\alpha & + n\beta & + n\gamma & + n\delta \\
\frac{n\partial\partial S}{2\partial x^2} = & & + \frac{1}{2}n\alpha & + \frac{1}{2}n\beta & + \frac{1}{2}n\gamma & \\
\frac{n\partial^3 S}{6.\partial x^3} = & & & + \frac{1}{6}n\alpha & + \frac{1}{6}n\beta & \\
\frac{n\partial^4 S}{24\partial x^4} = & & & & + \frac{1}{24}n\alpha & \\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

quarum ſerierum ſumma quia aequari debet ipſi X, hinc ſequentes determinationes reſultabunt:

$$(n+1)\alpha = 1;$$
$$(n+1)\beta + n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\gamma + n\beta + \tfrac{1}{2}n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\delta + n\gamma + \tfrac{1}{2}n\beta + \tfrac{1}{6}n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\varepsilon + n\delta + \tfrac{1}{2}n\gamma + \tfrac{1}{6}n\beta + \tfrac{1}{24}n\alpha = 0.$$
$$\text{etc.}$$

§. 27.

§. 27. Reſolutio igitur harum aequalitatum nobis ſuppeditabit ſequentes valores:

$$\alpha = \frac{1}{n+1};$$
$$\beta = -\frac{n}{(n+1)^2};$$
$$\gamma = \frac{n(n-1)}{2(n+1)^3};$$
$$\delta = -\frac{n(nn-4n+1)}{6(n+1)^4}.$$

etc.

Nimis autem moleſtum foret euolutionem harum formularum vlterius proſequi, quamobrem conueniet, loco horum coefficientium alios in calculum introducere, qui ſint

$$\alpha = \frac{A}{n+1},\ \beta = -\frac{B}{(n+1)^2},\ \gamma = +\frac{C}{(n+1)^3},\ \delta = -\frac{D}{(n+1)^4},\ \text{etc.}$$

ita vt ſeries noſtra pro S inuenta hanc induat formam:

$$S = \frac{A}{(n+1)}X - \frac{B}{(n+1)^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

§. 28. Nunc igitur iſtae nouae litterae A, B, C, D etc. per ſequentes formulas determinabuntur:

$$A = 1,$$
$$B = nA,$$
$$C = nB - \tfrac{1}{2}n(n+1)A,$$
$$D = nC - \tfrac{1}{2}n(n+1)B + \tfrac{1}{6}n(n+1)^2A,$$
$$E = nD - \tfrac{1}{2}n(n+1)C + \tfrac{1}{2}n(n+1)^2B - \tfrac{1}{24}n(n+1)^3A, \text{ etc.}$$

vnde facilius iam colligentur ſequentes valores:

$$A = 1,$$
$$B = n,$$
$$C = \tfrac{1}{2}n(n-1),$$
$$D = \tfrac{1}{6}n(nn-4n+1),$$
$$E = \tfrac{1}{24}n(n^3-11nn+11n-1).$$

§. 29. Quo indolem horum numerorum A, B, C, D penitius perſcrutemur, contemplemur iſtam ſeriem easdem litteras inuoluentem:

$$s = A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.}$$

ex qua ſecundum relationes ante inuentas formemus ſequentes ſeries:

$$\begin{aligned}
s &= A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.}\\
-ns t &= -nA - nBt - nCtt - nDt^3 - nEt^4 - \text{etc.}\\
+\tfrac{1}{2}n(n+1)stt &= +\tfrac{1}{2}n(n+1)A + \tfrac{1}{2}n(n+1)Bt + \tfrac{1}{2}n(n+1)Ctt + \tfrac{1}{2}n(n+1)Dt^3 + \text{etc.}\\
-\tfrac{1}{6}n(n+1)^2st^3 &= -\tfrac{1}{6}n(n+1)^2A - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2Bt - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2Ctt - \text{etc.}\\
+\tfrac{1}{24}n(n+1)^3st^3 &= +\tfrac{1}{24}n(n+1)^3A + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3Bt + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

His igitur ſeriebus in vnam ſummam collectis impetrabimus hanc aequationem:

$$s\left(1 - nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)tt - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}\right) = 1.$$

§. 30. Vt nunc hanc aequationem ad formam finitam reducamus, in ſubſidium vocemus hanc progreſſionem:

$$e^{-(n+1)t} = 1 - (n+1)t + \tfrac{1}{2}(n+1)^2tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^3t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^4t^4 - \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{e^{-(n+1)t} - 1}{n+1} = -t + \tfrac{1}{2}(n+1)tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

conſequenter

$$\frac{n}{n+1}\left(e^{-(n+1)t} - 1\right) = -nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)t^2 - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

Hinc igitur nanciſcemur ſequentem aequationem finitam:

$$s\left(1 + \frac{n}{n+1}\left(e^{-(n+1)t} - 1\right)\right) = s\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-(n+1)t}\right) = 1.$$

Ex hac autem aequatione, ſi valor ipſius s per ſeriem eliciatur, ipſa

ipſa ſeries aſſumta prodire debet, ex qua idcirco noſtrae litterae a; b, c, d immoteſcent. Hinc igitur erit

$$e^{-(n+1)t} = \frac{1+n-s}{ns},$$

ideoque $-(n+1)\,t = l(1+n-s) - l\,n\,s$ et differentiando

$$-(n+1)\,\partial t = -\frac{\partial s}{1+n-s} - \frac{\partial s}{s} = -\frac{(1+n)\,\partial s}{s(1+n-s)};$$

ex qua aequatione colligitur $s(1+n-s) = \frac{\partial s}{\partial t}$.

§. 31. Statuatur nunc $s = \frac{1}{2}(n+1) + v$, vt fiat

$$v = -\tfrac{1}{2}(n+1)\,A + B\,t + C\,t\,t + D\,t^3 + \text{etc.}$$

eritque noſtra aequatio $\frac{1}{4}(n+1)^2 - v\,v = \frac{\partial v}{\partial t}$. Ad calculi igitur compendium ponamus $\frac{1}{2}(n+1) = m$, ſitque $A - \frac{1}{2}(n+1) = \Delta$, vt ſeries noſtra ſit

$$v = \Delta + B\,t + C\,t\,t + D\,t^3 + E\,t^4 + F\,t^5 + G\,t^6 + H\,t^7 + \text{etc.}$$

tum vero habebimus:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = m\,m - v\,v, \text{ ſiue } \frac{\partial v}{\partial t} + v\,v = m\,m.$$

In hac ergo aequatione loco v ſeriem aſſumtam ſubſtituamus eritque

$$\frac{\partial v}{\partial t} = B + 2C\,t + 3D\,t\,t + 4E\,t^3 + 5F\,t^4 + 6G\,t^5 + \text{etc.}$$

$$v\,v = \Delta\Delta + 2\Delta B + 2\Delta C + 2\Delta D + 2\Delta E + 2\Delta F + \text{etc.}$$
$$+ BB + 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.}$$
$$+ CC + 2CD + \text{etc.}$$

quarum ergo ſerierum ſumma debet eſſe $= m\,m$, vnde deducuntur ſequentes determinationes:

$B + \Delta\Delta = m\,m$;	hinc $B = m\,m - \Delta\Delta$;
$2C + 2\Delta B = 0$;	$2C = -2\Delta B$;
$3D + 2\Delta C + BB = 0$;	$3D = -2\Delta C - BB$;
$4E + 2\Delta D + 2BC = 0$;	$4E = -2\Delta D - 2BC$,
$5F + 2\Delta E + 2BD + CC = 0$;	$5F = -2\Delta E - 2BD - CC$.
etc.	etc.

§. 32.

§. 32. Cum iam posuerimus $\Delta = A - \frac{1}{2}(n+1) = A - m$, ob $A = 1$ erit $\Delta = 1 - m = \frac{1-n}{2}$. Retineamus autem litteram m in calculo, existente $m = \frac{1}{2}(n+1)$, ac reperiemus $B = n$, et quia est $-2\Delta = n - 1$, formulae nostrae euadent

$$2C = (n-1)B;$$
$$3D = (n-1)C - BB;$$
$$4E = (n-1)D - 2BC;$$
$$5F = (n-1)E - 2BD - CC;$$
$$6G = (n-1)F - 2BE - 2CD.$$

etc.

haeque formulae ad calculum magis accommodatae videntur quam superiores §. 28. quia hic occurrit minor terminorum numerus atque etiam factores sunt simpliciores. Ex his igitur valores supra inchoatos vlterius prosequemur:

$$A = 1;$$
$$B = n;$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1.2};$$
$$D = \frac{n(nn-4n+1)}{1.2.3};$$
$$E = \frac{n(n^3-11nn+11n-1)}{1.2.3.4};$$
$$F = \frac{n(n^4-26n^3+66n^2-26n+1)}{1.2.3.4.5};$$
$$G = \frac{n(n^5-57n^4+302n^3-302nn+57n-1)}{1.\ldots\ldots 6}.$$

§. 33. Hae expressiones eo magis sunt notatu dignae, quod coefficientes in numeratoribus ad formulas generales reduci possunt; namque coefficientes terminorum secundorum, qui sunt 0, 0, 1, 4, 11, 26, 57, 120, etc. nascuntur ex forma generali $2^{z-1} - z$, coefficientes vero terminorum tertiorum,

rum, qui ſunt 0, 0, 0, 1, 11, 66, 302, etc. oriuntur ex formula generali $3^{z-1} - 2^{z-1} z + \frac{z(z-1)}{1.2}$; ſimili modo terminorum quartorum, qui ſunt 0, 0, 0, 0, 1, 26, 302, etc. terminus generalis eſt

$$4^{z-1} - 3^{z-1} . z + 2^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3};$$

quintorum vero terminorum coefficientes, qui ſunt 0, 0, 0, 0, 0, 1, 57, etc. oriuntur ex forma generali hac:

$$5^{z-1} - 4^{z-1} . z + 3^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2.} - 2^{z-1} . \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1...4},$$

vnde iam ſatis clarum eſt, quomodo pro ſequentibus terminis formulae generales conſtitui debeant.

§. 34. Inuentis igitur ſecundum has regulas valoribus litterarum A, B, C, D, etc. ſeriei propoſitae infinitae

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \text{etc.}$$

ſumma erit

$$n^x \left(\frac{A}{n+1} X - \frac{B}{(n+1)^2} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3} \frac{\partial \partial x}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4} \frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + \text{etc.}\right).$$

Ita ſi fuerit $X = 1$ et ſeries ſummanda

$$n^x - n^{x+1} + n^{x+2} - n^{x+3} + n^{x+4} - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \partial x}{\partial x^2} = 0$, erit ſumma quaeſita $= n^x \frac{A}{n+1} = \frac{n^x}{n+1}$.

At ſi ſumatur $X = x$, vt ſeries ſummanda ſit

$$n^x . x - n^{x+1} (x+1) + n^{x+2} (x+2) - n^{x+3} (x+3) + \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, ſequentia vero differentialia $= 0$, erit ſumma quaeſita

$$= n^x \left(\frac{Ax}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = n^x \left(\frac{x}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Hinc ergo ſi ſumatur $x = 1$, huius ſeriei:

$$n - 2n^2 + 3n^3 - 4n^4 + 5n^5 - 6n^6 + \text{etc.}$$

ſumma erit $= \frac{n}{(n+1)^2}$, cuius fractionis euolutio manifeſto producit iſtam ſeriem. Plura exempla adiungere ſuperfluum foret, quia hoc argumentum iam alias fuſius eſt tractatum.

Problema III.

Si vt ante X denotet functionem quamcunque ipſius x, *quae loco* x *ſcribendo ſucceſſiue* $x+1$, $x+2$, $x+3$, *abeat in* X', X'', X''', *ac proponatur ſequens ſeries infinita cum progreſſione hypergeometrica commiſta:*

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ x.X$$
$$-1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (x+1)X'$$
$$+1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (x+2)X''$$
$$-\ etc.$$

eius ſummam inueſtigare.

Solutio.

§. 35. Statuatur iſta ſumma quaeſita $= 1.2.3\ldots xS$, ita vt tantum functionem S indagari oporteat, eritque

$$S = X-(x+1)X'+(x+1)(x+2)X''-(x+1)(x+2)(x+3)X'''+\text{etc.}$$

Hinc ergo ſi loco x vbique ſcribamus $x+1$, fiet

$$S' = X' - (x+2)X'' + (x+2)(x+3)X''' - (x+2)(x+3)(x+4)X'''' + \text{etc.}$$

quae poſterior ſeries per $x+1$ multiplicata ac priori adiecta producet iſtam aequationem: $S+(x+1)S' = X$, ex qua ergo valorem ipſius S definire oportet.

§. 36. Hic autem pro S talem ſeriem per differentialia ipſius X procedentem fingere non licet vt ſupra, propterea quod functio

$$S' = S + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial\partial s}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 s}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

per factorem variabilem $x+1$ eſt multiplicata, quamobrem pro S aſſumamus ſeriem generalem $p+q+r+s+t+$ etc.

quae

quae ita ſit comparata, vt differentiale cuiusque partis cadat in locum ſequentem. Cum igitur noſtra aequatio ſit

$$(x+2)S+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3}+\text{etc.}=X,$$

hic loco S eiusque differentialium ſecundum legem praeſcriptam ſeries aſſumta ſubſtituatur, ac peruenietur ad hanc aequationem:

$$\begin{aligned}X=&(x+2)p+(x+2)q+(x+2)r+(x+2)s+(x+2)t+(x+2)u+\text{etc.}\\&+(x+1)\frac{\partial p}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial t}{\partial x}+\text{etc.}\\&+(x+1)\frac{\partial\partial p}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial q}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial r}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2}+\text{etc}\\&+(x+1)\frac{\partial^3 p}{6\,\partial x^3}+(x+1)\frac{\partial^3 q}{6\,\partial x^3}+(x+1)\frac{\partial^3 r}{6\,\partial x^3}+\text{etc.}\\&\qquad\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

hicque primum ſtatuatur $X=(x+2)p$, ita vt ſit $p=\frac{X}{x+2}$, tum vero pro reliquis habebuntur ſequentes aequationes:

$$(x+2)q+(x+1)\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$(x+2)r+(x+1)\frac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial p}{2\,\partial x^2}=0,$$

$$(x+2)s+(x+1)\frac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial q}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 p}{6\,\partial x^3}=0,$$

$$(x+2)t+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial r}{2\,\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 q}{6\,\partial x^3}+(x+1)\frac{d^4 p}{24\,dx^4}=0.$$

etc.

§. 37. Ex his igitur aequationibus haud difficile erit valores ſingularum litterarum q, r, s, t per praecedentes iam inuentas definire. In genere autem haec euolutio mox ad formulas nimis complicatas perduceret, namque cum ſit $p=\frac{X}{x+2}$, erit $\partial p=\frac{\partial X}{x+2}-\frac{X\partial x}{(x+2)^2}$, vnde colligitur

$$(x+2)q+\frac{(x+1)}{x+2}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{(x+1)X}{(x+2)^2},$$

hincque

$$q=-\frac{(x+1)}{(x+2)^2}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{x+1\,X}{(x+2)^3};$$

cuius ergo differentiale non ſolum denuo ſumi deberet, ſed etiam differentio-differentiale ipſius p, vt inde deriuetur valor ipſius r. Interim tamen hi valores in genere commodius exprimuntur ſequenti modo:

$$q = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}.\partial.p,$$
$$r = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(q+\frac{\partial p}{2\partial x}\right),$$
$$s = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(r+\frac{\partial q}{2\partial x}+\frac{\partial\partial p}{6\partial x^2}\right),$$
$$t = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(s+\frac{\partial r}{2\partial x}+\frac{\partial\partial q}{6\partial x^2}+\frac{\partial^3 p}{24\partial x^3}\right),$$
etc.

§. 38. In genere autem has formulas euoluere non eſt opus, quia quouis caſu propoſito euolutio haud difficulter inſtitui poterit, quod vnico caſu oſtendiſſe ſufficiet. Sumatur igitur $X = 1$ eruntque etiam omnes valores inde deriuati X', X'', etc. vnitati aequales. Ac primo hoc caſu habebitur $p = \frac{1}{x+2}$, cuius ergo differentialia erunt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+2)^3},\quad \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{6}{(x+2)^4},\text{ etc.}$$

hinc igitur primo colligimus $q = +\frac{x+1}{(x+2)^3}$, qui valor reſolvatur in has partes: $q = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^3}$, vnde fiet

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2}{(x+2)^3}+\frac{3}{(x+2)^4}\text{ et}$$
$$\frac{\partial\partial q}{\partial x^2} = \frac{6}{(x+2)^4}-\frac{12}{(x+2)^5},\text{ etc.}$$

Ex his igitur porro fit

$$r = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{3}{(x+2)^4}\right).$$

Cum nunc ſit $-\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -1+\frac{1}{x+2}$, fiet

$$r = +\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{4}{(x+2)^4}+\frac{3}{(x+2)^5},$$

vnde fit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{(x+2)^4}+\frac{16}{(x+2)^5}-\frac{15}{(x+2)^6}$$

ex

ex quo valore colligitur

$$s = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^4} + \frac{10}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6}\right).$$

His igitur valoribus inuentis ſeriei infinitae

$$\begin{aligned} &1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots x \\ -&1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+1) \\ +&1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+2) \\ -&1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+3) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

ſumma erit

$$1.\ 2.\ 3. \ldots\ldots x\,(p + q + r + s + \text{etc.}).$$

§. 39. Sumamus hic pro caſu ſpecialiſſimo $x = 0$, vt ſummanda proponatur haec ſeries hypergeometrica $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.}$, pro qua ergo erit $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero reperietur

$$p = \tfrac{1}{2},\ q = \tfrac{1}{8},\ r = -\tfrac{1}{32},\ s = -\tfrac{1}{128}.$$

Calculo ergo hucusque producto ſumma deſiderata prodit

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{128} = \tfrac{75}{128} = 0,5859,$$

quae non multum diſcrepat ab ea quam olim omni ſtudio elicui.

§. 40. Sumamus nunc $x = 1$, vt ſummanda ſit haec ſeries $1 - 2 + 6 - 24 + 120 - \text{etc.}$, eritque $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{27}$, $r = 0$, $s = -\frac{1}{729}$. Hinc ergo erit noſtra ſumma $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} - \frac{1}{729} = \frac{221}{729} = 0,40192$, quae ſumma cum praecedente ſatis exacte conſpirat, quoniam hinc ambae ſeries iunctae prodeunt $0,9878$: prodire enim deberet vnitas; vnde patet, ſi vlterius ſeriem p, q, r, s eſſemus proſecuti, tum etiam ad veritatem multo propius acceſſiſſemus.

PROBLEMATVM QVORVNDAM SPHAERICORVM SOLVTIO.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 11 *Iun.* 1780.

Problema I.

Tab. II. fig. 1. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerica triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur et in quo angulus ad verticem A C B sit maximus.*

Solutio.

Sint E et F puncta intersectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, seu angulus $AEC = \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E distantiae $EA = a$; $EB = b$; et cum in circulo maximo E C F quaeratur punctum C tale, vt ductis arcubus circulorum maximorum A C et B C, angulus A C B fiat maximus: ponatur arcus $EZ = z$, et videamus quomodo haec incognita z per datas quantitates a, b, α, definiri debeat, vt conditio praescripta adimpleatur.

Hunc in finem notetur ex binis triangulis E C B et E C A oriri has determinationes:

tang.

$$\text{tang. E C B} = \frac{\text{sin. } b \text{ . sin. } \alpha}{\text{cos. } b \text{ sin. } z - \text{sin. } b \text{ cos. } z \text{ cos. } \alpha},$$

$$\text{tang. E C A} = \frac{\text{sin. } a \text{ . sin. } \alpha}{\text{cos. } a \text{ sin. } z - \text{sin. } a \text{ cos. } z \text{ cos. } \alpha},$$

vnde cum fit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{tang. E C B} - \text{tang. E C A}}{1 + \text{tang. E C B . tang. E C A}},$$

pro angulo ad verticem C hanc obtinebimus expreſſionem ſatis complicatam:

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } z \text{ sin. } (b - a)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } \alpha^2 + (\text{cos. } b \text{ sin. } z - \text{sin. } b \text{ cos. } z)(\text{cos. } a \text{ sin. } z - \text{sin. } a \text{ cos. } z \text{ cos. } \alpha)}.$$

Quo haec expreſſio tractabilior reddatur, multiplicetur primum denominatoris membrum per $\text{sin. } z^2 + \text{cos. } z^2 = 1$, et facta euolutione, ponatur breuitatis gratia:

$$\text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } \alpha^2 + \text{cos. } a \text{ cos. } b = A;$$

$$\text{sin. } a \text{ sin. } b = B;$$

$$\text{cos. } \alpha \text{ sin. } (a + b) = C;$$

quo facto expreſſio ſupra inuenta hanc induit formam paulo concinniorem:

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } (b - a) \text{ sin. } z}{A \text{ sin. } z^2 + B \text{ cos. } z^2 - C \text{ sin. } z \text{ cos. } z},$$

quam igitur expreſſionem *Maximum* reddi oportet.

Facta iam differentiatione numerator nihilo aequandus, omiſſo ſcilicet factore conſtante $\text{sin. } \alpha \text{ sin. } (b - a)$, erit

$$B \text{ cos. } z^3 + (2B - A) \text{ sin. } z^2 \text{ cos. } z - C \text{ sin. } z^3,$$

vnde diuidendo per $\text{cos. } z^3$ emergit aequatio:

$$B + (2B - A) \text{ tang. } z^2 - C \text{ tang. } z^3 = 0,$$

in qua ergo aequatione tertii gradus problematis ſolutio continetur. Vnde cum haec aequatio vel vnicam habeat vel omnes tres radices reales, fieri poteſt vt etiam problema noſtrum vel vnicam

vnicam vel tres ſolutiones admittat, quo poſteriore ſcilicet caſu duae ſolutiones maximum exhibebunt, tertia vero minimum.

Euolutio caſuum quibus tres ſolutiones locum habent.

Operae pretium erit caſus accuratius conſideraſſe, quibus hoc problema tres ſolutiones admittit; reliqui enim caſus per regulas notiſſimas haud difficulter expediuntur. Hunc in finem aequationi noſtrae cubicae aliam formam paulo concinniorem tribuemus, ſtatuendo tang. $z = v$, ita vt ſit

$$v^3 + \frac{A - 2B}{C} v^2 - \frac{B}{C} = 0;$$

quae aequatio poſito $v = \frac{k}{x}$ abit in hanc:

$$k^3 + \frac{(A - 2B) k k}{C} x - \frac{B}{C} x^3 = 0,$$

ſiue in iſtam:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B} k k . x + \frac{C}{B} k^3.$$

Iam vero ternae radices reales huius aequationis, ſi quidem habeat tales, commode per triſectionem anguli determinari poſſunt. Si enim ponamus cof. $3\zeta = m$ et cof. $\zeta = s$, conſtat eſſe cof. $\zeta^3 = \frac{3}{4}$ cof. $\zeta + \frac{1}{4}$ cof. 3ζ, conſequenter $s^3 = \frac{3}{4} s + \frac{1}{4} m$, qua aequatione comparata cum noſtra:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B} k^2 . x + \frac{C}{B} k^3,$$

manifeſtum eſt fieri debere $x = s$; tum vero $\frac{A - 2B}{B} k k = \frac{3}{4}$ et $\frac{C}{B} k^3 = \frac{1}{4} m$: vnde fit $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ et $m = \frac{4C k^3}{B}$. Inuento autem hoc valore m habebitur etiam cof. 3ζ; vnde ſi angulus, cuius tripli cofinus $= m$, vocetur β, non ſolum erit $3\zeta = 3\beta$, ſed etiam $3\zeta = 3\beta \pm 360°$, ita vt terni valores anguli ζ ſint 1°) $\zeta = \beta$; 2°) $\zeta = \beta + 120$; 3°) $\zeta = \beta - 120°$; quocirca, ob $s = x = \frac{k}{v} = \frac{k}{\text{tang.}\,\zeta} = k$ cot. ζ, erit

1°)

1°) $\cot. z = \frac{\cos. \beta}{k}$;

2°) $\cot. z = \frac{\cos. (\beta + 120°)}{k}$;

3°) $\cot. z = \frac{\cos. (\beta - 120°)}{k}$.

Nunc igitur haud difficile erit conditiones ſtabilire, quae requirentur, ſi problema tres ſolutiones admittere debeat. Manifeſtum enim eſt, quo ternae radices ſint reales, non ſolum requiri vt valor $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ ſit poſitiuus, ſed etiam, ob $m = \cos. 3\zeta = \frac{4Ck^3}{B}$, fieri debere $B > 4.C.k^3$. Harum conditionum prior $\frac{3B}{4(A-2B)} > 0$ poſtulat vt ſit $A - 2B > 0$, hoc eſt

$\sin. a \sin. b (\sin. \alpha^2 - 2) + \cos. a \cos. b > 0$, ſiue

$\sin. \alpha^2 - 2 + \cot. a \cot. b > 0$, vel denique

$\sin. \alpha^2 > 2 - \cot. a \cot. b$;

vnde patet, arcus a et b ita comparatos eſſe debere, vt productum cotangentium eorum ſit vnitate maior. Altera conditio declarat hos arcus a et b ita ſumendos eſſe, vt differentia inter valores A et 2B fiat ſatis notabilis.

Exemplum.

Quo indolem huius ſolutionis clarius perſpiciamus, conſideremus caſum quendam determinatum, ſtatuendo arcus $EA = a = 17°$, $EB = b = 59°$ et angulum $AEC = \alpha = 85°$, et calculo pro valoribus litterarum A, B, C, inſtituto, inuenimus $A = 0,74124$; $B = 0,25061$; $C = 0,08457$, ex quibus porro deducimus $k = 0,88493$ et $m = 0,93537$, vnde fit $\cos. 3\zeta = 0,93537$, conſequenter $3\zeta = 20°,43'$ et $\zeta = 6°,54'$ circiter. Terni igitur valores noſtrae cotangentis erunt ſequentes:

$$\cot. z = \frac{cos.\,(6°,\,54')}{0,\,88493} = +\,1,\,12185;$$

$$\cot. z = \frac{cos.\,(126°,\,54')}{0,\,88493} = -\,0,\,67850;$$

$$\cot. z = \frac{cos.\,(113°,\,6')}{0,\,88493} = -\,0,\,44336;$$

qui pro ipſo arcu $EC = z$ et angulo ACB dant:

$z = 41°,33'$, $ACB = 46°,10'$. *Maximum.*
$z = 124,\ 9$; $ACB = 41,23\frac{1}{2}$. *Maximum.*
$z = 113,55$, $ACB = 41,22$. *Minimum.*

Tab. II. Fig. 2. Quod ſi igitur conſideremus duos circulos maximos $EABF$ et $ECC'C''F$, ſe inuicem ſub angulo $AEC = 85°$ interſecantes, in quorum priore capiantur arcus $EA = 17°$, $EB = 59°$, ita vt ſit arcus $AB = 42°$; manifeſtum eſt, ſi trianguli ſuper baſi AB conſtruendi vertex capiatur in ipſo puncto E, tum angulum ad verticem nihilo fore aequalem; dum autem iſte vertex in circulo maximo ECF paulatim elevatur, angulus ad verticem continuo increſcit, donec peruenerit in punctum C, vbi, vt vidimus, arcus $EC = 41°,43'$, et angulus $ACB = 46°,10'$. Hinc autem ſi vlterius aſcendamus, angulus verticalis iterum decreſcit, vsque ad punctum C', vbi arcus $EC' = 113°,55'$ et angulus $AC'B = 41°,22'$; inde vero vlterius progrediendo iſte angulus denuo paululum augebitur, vsque dum vertex punctum C'' attigerit, in quo arcus $EC'' = 124°,9'$ et angulus $ACB = 41°,23\frac{1}{2}'$. Dehinc porro iſte angulus continuo decreſcit, donec tandem in puncto F penitus euaneſcat. Euidens autem eſt etiam in inferiore circuli maximi ECF ſemiſſe easdem tres ſolutiones exhiberi poſſe, ita vt hoc caſu omnino ſex ſolutiones locum habeant, tria maxima ſcilicet, totidemque minima. Maxima enim ACB et $AC''B$ in inferiore ſemiſſe, vtpote negatiua, in mini-

minima abeunt, minimum vero A C′ B in maximum, quemadmodum rei natura poſtulat, quandoquidem maxima et minima ſe alternatim ſemper excipere debent.

Euolutio caſus quo angulus α eſt rectus.

Sit angulus $AEC = \alpha = 90^\circ$, erit $A = \text{cof.}(b-a)$, $B = \text{ſin. } a \text{ ſin. } b$; $C = 0$, vnde pro hoc caſu aequatio ſolutionem problematis continens tantum ſit quadratica:

$$B + (2B - A)\,\text{tang. } z^2 = 0;$$

vnde ſit

$$\text{tang. } z^2 = \frac{B}{A - 2B} = \frac{\text{ſin. } a \text{ ſin. } b}{\text{cof. } (a+b)}.$$

Arcus z autem commodius per ſinum exprimitur; cum enim ſit $\text{ſin. } z^2 = \frac{\text{tang. } z^2}{1 + \text{tang. } z^2}$, erit $\text{ſin. } z^2 = \frac{\text{ſin. } a \text{ ſin. } b}{\text{cof. } a \text{ cof. } b}$, ergo $\text{ſin. } z = \sqrt{\text{tang. } a \text{ tang. } b}$.

Hic quidem duae tantum ſolutiones prodire videntur; verum probe notandum eſt, omittendo in aequatione generali terminum C tang. z^3, vnam ſolutionem iam fuiſſe expulſam. Cum enim ſit $\text{tang. } z^3 = \frac{(2B - A)\,\text{tang. } z^2 + B}{C}$, euidens eſt caſu $C = 0$ prodire $\text{tang. } z = \infty$, ideoque arcum $EC = z$ quadranti aequalem; atque haec ſolutio vtique eſt tertia pro caſu $\alpha = 90^\circ$, quae adeo ſemper locum habet, cum prior ſolutio $\text{ſin. } z = \sqrt{\text{tang. } a \text{ tang. } b}$ imaginaria euadat, quoties tangentium arcuum a et b productum vnitate fit maius.

Quoties igitur fuerit $\text{tang. } a \text{ tang. } b \geq 1$, hoc eſt $a + b \geq 90^\circ$, tantum vnica ſolutio locum habebit, qua ſcilicet arcus EC quadrante fiet aequalis, hocque caſu ambo arcus AC et BC pariter erunt quadrantes et anguli ad verticem maximi men-

ſura erit ipſe arcus A B, id quod etiam noſtra formula declarat generalis, quae poſito $\alpha = 90°$ et $z = 90°$ euadit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)}{\text{coſ.}(b-a)} = \text{tang.}(b-a) = \text{tang. A B},$$

ideoque A C B = A B.

Quoties autem fuerit tang.a tang.$b < 1$, hoc eſt $a+b < 90°$, inſuper duae aliae ſolutiones locum habent, quibus ſcilicet ſin.$z = \sqrt{\text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b}$, vnde pro z duplex naſcitur valor, quorum alter alterius complementum ad 180°. Hoc autem caſu angulus ad verticem ita definietur. Cum ſit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)\ \text{ſin.}\,z}{\text{A ſin.}\,z^2 + \text{B coſ.}\,z^2},$$

ob ſin.$z = \sqrt{\text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b}$ et coſ.$z = \sqrt{\frac{\text{coſ.}(a+b)}{\text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,b}}$; A = coſ.$(b-a)$ et B = ſin.a ſin.b, erit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)\sqrt{(\text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b}}{\text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b\,(\text{coſ.}\,b-a) + \text{coſ.}(b+a))},\ \text{ſiue}$$

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)}{2\,\text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,b\sqrt{\text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b}} = \frac{\text{ſin.}(b-a)}{2\sqrt{\text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,b\ \text{ſin.}\,a\ \text{ſin.}\,b}},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc ſimpliciorem:

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)}{\sqrt{\text{ſin.}\,2a\ \text{ſin.}\,2b}},$$

Simpliciſſime autem ſinus huius anguli exprimitur; ex forma enim penultima fit

$$\text{ſin. A C B} = \frac{\text{ſin.}(b-a)}{\sqrt{(\text{ſin.}(b-a)^2 + 4\,\text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,b\ \text{ſin.}\,a\ \text{ſin.}\,b)}},$$

hoc eſt ſin. A C B $= \frac{\text{ſin.}(b-a)}{\text{ſin.}(b+a)}$.

Quoniam haec expreſſio maior eſt illa quam prior ſolutio dederat: ſin. A C B = ſin.$(b-a)$, quoties $a+b < 90°$, manifeſtum eſt illam ſolutionem exhibere minimum ſimile illi quod ſupra inuenimus pro caſu $\alpha = 85°$, hoc tantum diſcrimine, quod puncta maximi C et C″ hic a punctis E et F, aeque

Tab. II. Fig. 3.

aeque ac punctum minimi C′, aequaliter distent. Si summa arcuum a et b quadranti fuerit aequalis, puncta C et C″ in C′ incidunt; sin autem $a + b > 90°$, bina puncta C et C″ fiunt imaginaria. Vtroque igitur casu angulus A C′ B, qui erat minimus inter maxima, nunc ipse fit maximus, arcu A B eius mensuram exhibente.

Euolutio casus quo A = 2 B.

Hic casus ideo attentione dignus videtur, quod posito A = 2 B secundum membrum aequationis cubicae euanescat, ita vt habeamus tang. $z^3 = \frac{B}{C}$. Manifestum autem est ob A = 2 B, hoc est

$$\text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } \alpha^2 + \text{cos. } a \text{ cos. } b = 2 \text{ sin. } a \text{ sin. } b, \text{ siue}$$
$$\text{sin. } \alpha^2 = 2 - \text{cot. } a \text{ cot. } b,$$

hunc casum locum habere non posse, nisi productum cotangentium amborum arcuum a et b intra limites 1 et 2 contineatur, quia alioquin angulus α fieret imaginarius.

Arcubus autem a et b ita assumtis, vt cot. a cot. $b > 1 < 2$, habebimus pro arcu E C hanc expressionem:

$$\text{tang. } z^3 \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } b}{\text{cos. } a \text{ sin. } (b + a)}. \quad \text{At}$$
$$\text{cos. } \alpha = \sqrt{(\text{cot. } a \text{ cot. } b - 1)} = \sqrt{\frac{\text{cos. } (a + b)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}}, \text{ ideoque}$$
$$\text{tang. } z^3 = \frac{(\text{sin. } a \text{ sin. } b)^{\frac{3}{2}}}{\text{sin. } (a + b) \sqrt{\text{cos. } (a + b)}}.$$

Tum autem tangens anguli maximi erit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } (b - a) \text{ sin. } z}{B (1 + \text{sin. } z^2 - C \text{ sin. } z \text{ cos. } z}.$$

Problema II.

Tab. II. Fig. 4. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in ſuperficie ſphaerae triangulum deſcribere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur, et in quo ſumma arcuum A C + B C fiat minima omnium.*

Solutio.

Sint vt ſupra E et F puncta interſectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, ſeu angulus A E C $= \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E diſtantiae, hoc eſt arcus E A $= a$, E B $= b$ et arcus incognitus E C $= z$; tum vero ponatur arcus A C $= p$ et arcus B C $= q$, atque ex Sphaericis conſtat fore ex triangulis binis A E C et B E C

$$\text{cof. } p = \text{cof. } a \text{ cof. } z + \text{ſin. } a \text{ ſin. } z \text{ cof. } \alpha,$$
$$\text{cof. } q = \text{cof. } b \text{ cof. } z + \text{ſin. } b \text{ ſin. } z \text{ cof. } \alpha,$$

vnde differentiando habebimus:

$$\partial p = \frac{\partial z\,(\text{cof. } a \text{ ſin. } z - \text{ſin. } a \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } z)}{\text{ſin. } p},$$
$$\partial q = \frac{\partial z\,(\text{cof. } b \text{ ſin. } z - \text{ſin. } b \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } z)}{\text{ſin. } q}.$$

Quum vero ſumma arcuum $p + q$ minima eſſe debeat, neceſſe eſt vt fiat $\partial p + \partial q = 0$; aequationis autem inde reſultantis reſolutio in calculos maxime taedioſos praecipitaret, propterea quod ſin. p et ſin. q per formulas radicales ſatis complicatas exprimuntur; vnde aliam viam commodiorem ad Problema ſolvendum inſiſtere debemus.

Conſideremus igitur punctum c ipſi trianguli quaeſiti vertici C proximum, ad quod ſi ducantur ex A et B arcus A c et B c, in eosque ex C demittantur perpendicula C r, C s,

Cs, erit $cr = \partial p$ et $cs = \partial q$; vnde ſi vocentur anguli $ECA = \Phi$, $ECB = \psi$, erit $cr = \partial p = \partial z \cos. \Phi$ et $cs = \partial q = \partial z \cos. \psi$. Cum igitur fieri debeat $\partial p + \partial q = 0$, habebimus $\partial z \cos. \Phi + \partial z \cos. \psi = 0$, vnde patet, quo $AC + BC$ fiat minimum, fieri debere $\cos. \Phi = -\cos. \psi$, ideoque $\Phi = 180° - \psi$, ſiue $\Phi + \psi = 180°$, ita vt etiam fieri debeat $\text{tang.}\, \Phi + \text{tang.}\, \psi = 0$.

Ex triangulis autem ECA et ECB colligitur

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{\sin. a \sin. \alpha}{\cos. a \sin. z - \sin. a \cos. z \cos. \alpha},$$

$$\text{tang.}\, \psi = \frac{\sin. b \sin. \alpha}{\cos. b \sin. z - \sin. b \cos. z \cos. \alpha},$$

vnde ſequens emergit aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} + \sin. a \cos. b \sin. z - \sin. a \sin. b \cos. \alpha \cos. z) \\ + \cos. a \sin. b \sin. z - \sin. a \sin. b \cos. \alpha \cos. z) \end{array}\right\} = 0,$$

quae reducitur ad hanc ſimpliciorem:

$$\sin. (a + b) \sin. z = 2 \sin. a \sin. b \cos. \alpha \cos. z,$$

ex qua pro puncto C hanc deducimus determinationem:

$$\text{tang.}\, z = \frac{2 \sin. a \sin. b \cos. \alpha}{\sin. (a + b)}.$$

Hoc igitur modo problema, quod in ſoluendo calculos moleſtiſſimos minari videbatur, facillime reſoluere licuit.

Corollarium 1.

Hic ſtatim patet, caſu quo ambo circuli maximi ſibi normaliter inſiſtunt, ſemper fore $z = 0$, ita vt trianguli vertex in ipſum punctum E incidat, quo caſu ſumma laterum erit maxima quando ſumma arcuum $a + b$ maior fuerit duobus quadrantibus, ſin autem minor, minima. At ſi iſta ſumma fuerit $a + b = 180$, neque maximum neque minimum locum habebit, propterea quod, vbicunque punctum C accipiatur,

piatur, ſumma arcuum $AC + BC$ ſemper duobus quadrantibus aequalis manet.

Corollarium 2.

Quicquid autem ſit angulus α, ſumto $a + b = 180°$, erit tang. $z = \infty$, ideoque $z = 90°$, quo igitur caſu punctum C quadrante diſtabit a puncto E. Sin autem fuerit $a + b = 90°$, fiet tang. $z = 2$ ſin. a coſ. a coſ. $\alpha = $ ſin. $2a$ coſ. α.

Problema III.

Tab. II. Fig. 5. *Datis in circulo maximo EABF duobus punctis A et B, in ſuperficie ſphaerae triangulum deſcribere ACB, cuius vertex C in alio circulo maximo dato ECF reperiatur cuiusque area ſit maxima.*

Solutio.

Sint omnia vt in binis praecedentibus problematibus, ſcilicet $EA = a$, $EB = b$, $AEC = \alpha$, $EC = z$; tum vero ſtatuatur area trianguli $AEC = X$ et area trianguli $BEC = Y$, eritque area trianguli $ACB = Y - X$, quae cum maxima fieri debeat, neceſſe eſt vt fiat $\partial Y - \partial X = 0$; Hic autem iterum ſi areas X et Y more ſolito exprimere et differentialia ſumere vellemus, in calculos inextricabiles illaberemur: ſequenti autem modo res facillime expedietur.

Conſideretur punctum vertici C proximum c, et ductis arcubus circulorum maximorum Ac et Bc habebimus duo triangula elementaria CAc et CBc, quae cum ſint incrementa triangulorum AEC & BEC, eorum areae exprimentur per ∂X et ∂Y.

Tracte-

Tractemus nunc primo triangulum elementare CAc, cuius area, posito angulo infinite paruo $CAc = \partial\omega$ et arcu $AC = p$, vti constat, ita exprimitur: $\partial X = \partial\omega(1 - \text{cos. } p)$. Ponatur autem angulus $ECA = \Phi$, eritque in triangulo CAc, $\partial z : \partial\omega = \text{sin. } p : \text{sin. } \Phi$, vnde fit $\partial\omega = \frac{\partial z \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z \text{ sin. } \Phi(1 - \text{cos. } p)}{\text{sin. } p}$. At vero ex triangulo EAC habebimus $\text{cos. } p = \text{cos. } a \text{ cos. } z + \text{sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \alpha$; tum vero

$$\text{sin. } a : \text{sin. } \Phi = \text{sin. } p : \text{sin. } \alpha,$$

siue $\text{sin. } \Phi = \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } \alpha}{\text{sin. } p}$, quo in expressione pro ∂X inuenta substituto fiet $\partial X = \frac{\partial z \text{ sin. } a \text{ sin. } \alpha (1 - \text{cos. } p)}{\text{sin. } p^2}$, siue $\partial X = \frac{\partial z \text{ sin. } a \text{ sin. } \alpha}{1 + \text{cos. } p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z \text{ sin. } a \text{ . sin. } \alpha}{1 + \text{cos. } a \text{ cos. } z + \text{sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \alpha}$.

Cum in ista expressione tantum arcus $EA = a$, $EC = z$ vna cum angulo $AEC = \alpha$ occurrant, et triangulum BEC eundem habeat arcum EC et angulum AEC, eius incrementum, siue trianguli CBc elementaris area inuenietur, si in expressione modo pro ∂X inuenta loco a scribatur b, vnde fiet $\partial Y = \frac{\partial z \text{ sin. } b \text{ sin. } \alpha}{1 + \text{cos. } b \text{ cos. } z + \text{sin. } b \text{ sin. } z \text{ cos. } \alpha}$.

Quoniam igitur pro adimplenda conditione maximae areae fieri debet $\partial Y - \partial X = 0$, inde sequens emergit aequatio:

$$\partial z \text{ sin. } \alpha \left(\frac{\text{sin. } b}{1 + \text{cos. } b \text{ cos. } z + \text{sin. } b \text{ sin. } z \text{ cos. } \alpha} - \frac{\text{sin. } a}{1 + \text{cos. } a \text{ cos. } z + \text{sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \alpha}\right) = 0$$

quae sublatis fractionibus, factaque diuisione per factorem communem $\partial z \text{ sin. } \alpha$, abit in hanc:

$$\left.\begin{array}{l} +\text{ sin. } b + \text{cos. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } z + \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } z \\ -\text{ sin. } a - \text{sin. } a \text{ cos. } b \text{ cos. } z - \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } z \end{array}\right\} = 0,$$

quae porro ad sequentem formam concinniorem reducitur:

$\sin. b - \sin. a - \cos. z \sin. (a - b) = 0$, vnde fit
$\cos. z = \frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. (a - b)}$.

Corollarium 1.

Cum fit $\sin. b - \sin. a = 2 \sin. \frac{b-a}{2} . \cos. \frac{b+a}{2}$ et
$\sin. (a - b) = -2 \sin. \frac{b-a}{2} \cos. \frac{b-a}{2}$,
cosinus arcus E C $= z$ etiam hoc modo exprimi potest:
$\cos. z = -\frac{\cos. \frac{b+a}{2}}{\cos. \frac{b-a}{2}}$, vnde fit
$\cos. F C = -\cos. E C = +\frac{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}$;
vbi notasse iuuabit, ob arcus $\frac{1}{2}(b+a)$ et $\frac{1}{2}(b-a)$ quadrante minores, semper fore $\cos. \frac{1}{2}(b-a) > \cos. \frac{1}{2}(b+a)$, vnde euidens est solutionem semper esse possibilem.

Corollarium 2.

Cum fit $\cos. F C = \frac{\cos. \frac{1}{2}(b+a)}{\cos. \frac{1}{2}(b-a)}$, erit
$\frac{1-\cos. F C}{1+\cos. F C} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} F C = \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-a) - \cos. \frac{1}{2}(b+a)}{\cos. \frac{1}{2}(b-a) + \cos. \frac{1}{2}(b+a)}$,
hoc est $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} F C = \text{tang.} \frac{1}{2} a \, \text{tang.} \frac{1}{2} b$, siue etiam
$\text{cot.}^2 \frac{1}{2} E C = \text{tang.} \frac{1}{2} E A . \text{tang.} \frac{1}{2} E B$;
vnde sequitur haec egregia proprietas: quod cotangens dimidii arcus E C sit media proportionalis inter tangentes dimidiorum arcuum E A et E B.

Corollarium 3.

Si ambo puncta A et B aequidistent ab intersectionibus circulorum maximorum E et F, sibi diametraliter oppositis, ob

ob $EA = a$ et $EB = b = 180° - a$ erit $\frac{b+a}{2} = 90°$, ideoque $\text{cof. } EC = \text{cof. } FC = 0$, conſequenter $EC = FC = 90°$. Hoc igitur caſu triangulum, cuius area eſt maxima erit iſoſceles.

Scholion.

In hoc poſtremo problemate id notatu dignum deprehenditur, primo quod quantitas arcus EC prorſus non pendeat ab inclinatione mutua circulorum maximorum, ſed per ſolos arcus EA et EB determinetur; tum vero quod hoc problema quodammodo in Sphaera conſtrui queat, quemadmodum ſequentia breuiter monſtrabunt.

Conſtructio problematis.

Biſecta baſi AB in D, ex A ad eam normaliter erigatur arcus AG tantus, vt arcus DG aequalis fiat arcui DE, quo facto ex F abſcindatur in circulo maximo ECF arcus $FC = AG$, eritque C vertex trianguli quaeſiti, et trianguli ACB area maxima.

Demonſtratio.

Cum ſit $EA = a$, $EB = b$, erit $AD = \frac{b-a}{2}$ et $ED = \frac{b+a}{2}$. In triangulo rectangulo DAG habebimus

$$\text{cof. } DG = \text{cof. } ED = \text{cof. } AD \,.\, \text{cof. } AG,$$ conſequenter

$$\text{cof. } AG = \frac{\text{cof. } ED}{\text{cof. } AD} = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cof. } \frac{1}{2}(b-a)}.$$

At $AG = FC$, ideoque $\text{cof. } FC = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cof. } \frac{1}{2}(b-a)}$, quae cum ſit ea ipſa expreſſio quam pro vertice trianguli inuenimus, cuius area maxima, triangulum hoc modo conſtructum maximam aream habeat neceſſe eſt.

DE PROIECTIONE SPHAERAE IN SVPERFICIEM CONICAM.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 7 Decembris 1786.

§. 1.

Cum ſuperficies Sphaerica in plano exacte repraeſentari nullo modo poſſit, via maxime naturalis videtur, vt illa primum in aliam ſuperficiem curuam proiiciatur, quae propius ad Planum accedit, adeoque quaſi inter Sphaeram atque Planum eſt medium quoddam, ac deinde haec proiectio ad Planum reducatur. Quemadmodum enim lineae curuae ſunt vel ſimplicis vel duplicis curuaturae, ita per analogiam ſuperficies curuae, quas inter maximum obſeruatur diſcrimen, ſi cum Plano conferantur, in ſuperficies curuas ſimplicis et duplicis curuaturae diuidi poſſent. Dantur ſcilicet ſuperficies, quas in Plano euoluere licet, quae adeo quoque vice verſa per incurvationem Plani generari poſſunt, vnde, vt ita dicam, ſemel tantum vel ſecundum vnam directionem incuruantur: dantur aliae, quae in Plano euolui ſeu per Plani flexionem gigni prorſus nequeunt, aut, ſi per Plani incuruationem ortae fingerentur, iſta incuruatio non ſecundum vnam ſed plures directiones facta concipi deberet, ſiue eſſe deberet *duplex* curuatura. Speciei

cici posterioris est Sphaera, prioris Conus atque Cylindrus. Quantumuis enim heterogeneae sint superficies curuae ac planae, sine dubio tamen tanta non intercedit heterogeneitas inter Conum Cylindrumue et Planum, quanta inter Sphaeram Planumque. Cum itaque methodus in omnibus scientiis recepta iubeat, rem arduam successiue declarare, et velut in aequationibus Algebraicis complicatis nouam introducere incognitam, inquirere volui, quidnam esset resultaturum, si superficies Sphaerica in Conum Sphaeram tangentem proiiceretur, tumque Conus in Planum euolueretur. Quanquam enim ista methodus haud praebeat proiectionem, quae ceteris vsitatis palmam praeripiat, tamen ceu disquisitio geometrica de Coni cum Sphaera coniunctione potest considerari, quam eo magis cum Academia communicare conatus sum, cum munus ab Academia mihi impositum huiusmodi disquisitiones praecipue a me poscere videatur.

§. 2. Sit itaque A P Q hemisphaerium, A Q Aequator, P Polus, E *e* Parallelus per medium Zonae proiiciendae transiens, in quo Parallelo Sphaeram tangat Conus E *p e*, atque quoduis Sphaerae punctum *d* proiiciatur in D vbi radius C *d* Cono occurrit: ponitur igitur oculus in centro C. Hinc statim patet, quemcunque Meridianum P E proiici in lineam rectam *p* E, quae est coni latus; proiectio enim est sectio conica per Coni axem *p* C transiens. Paralleli vero in circulos basi coni parallelos proiiciuntur: est enim Parallelus *d* δ basis coni *d* C δ, qui prolongatus vbi alteri cono E *p e* occurrit, determinat paralleli proiectionem. Ponatur nunc latitudo Paralleli medii A E $= \lambda$, A *d* $= \beta$: erit E *p* $=$ cot. λ, C *p* $=$ cosec. λ, E D $=$ tang. $(\beta - \lambda)$, *p* D $= \frac{cos.\,\beta}{sin.\,\lambda\,cos.\,(\beta-\lambda)}$, assumto radio Sphaerae $= 1$. Est enim Tab. III. Fig. 1.

$$p\,D = E\,p - E\,D = \cot.\lambda - \tang.(\beta-\lambda) = \cot.\lambda - \frac{\tang.\beta - \tang.\lambda}{1+\tang.\beta\tang.\lambda}$$
$$= \frac{\cot.\lambda + \tang.\lambda}{1+\tang.\beta\tang.\lambda} = \frac{1+\tang.\lambda^2}{\tang.\lambda+\tang.\lambda^2\tang.\beta} = \frac{\sec.\lambda^2}{\tang.\lambda+\tang.\lambda^2\tang.\beta}$$
$$= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.\lambda\cos.\beta+\sin.\beta\sin.\lambda^2} = \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.(\beta-\lambda)}.$$

§. 3. Si iam Conus in planum euoluatur, Paralleli iterum fiunt circuli, quorum radii sunt Meridiani, atque centrum commune proiectio Poli p, et cuiuscunque Paralleli sub latitudine β radius est $= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.(\beta-\lambda)}$. Verum circuli isti, licet totum Parallelum seu 360° repraesentent, non sunt peripheriae integrae, sed basis Coni $E\,e$, quae erat circulus radii $R\,E$, euoluitur in circulum, cuius radius $E\,p$. Cum itaque peripheria $E\,e$ eandem retineat longitudinem absolutam, atque anguli, quos arcus aequales diuersorum circulorum metiuntur, sint inuerse vt radii circulorum: si basis euoluta $E\,e$ contineat Φ gradus, erit $\Phi = \frac{R\,E}{E\,p}\,360°$. Idem quoque de ceteris Parallelis patet, quia sunt omnes concentrici, insuperque inde sequitur, quod sit e. gr. pro Parallelo $D\,L$, $\Phi = \frac{S\,D}{p\,D}\,360°$, et $S\,D : p\,D = R\,E : E\,p$. Erit itaque

$$\Phi = \frac{\cos.\lambda}{\cot.\lambda}\,360° = 360°\,\sin.\lambda.$$

Hic arcus Φ totam peripheriam vel 360° longitudinis exhibet; vnde cum omnes gradus longitudinis sint inter se aequales, erit in proiectione arcus Paralleli, qui 1° longitudinis exhibet, $= \sin.\lambda$ in partibus vnius gradus.

b. III. g. 2. §. 4. Facilis ergo proiiciendi methodus hinc iam perspicitur. Ducatur (Fig. 2.) recta $p\,F$, repraesentans Meridianum per medium regionis proiiciendae transeuntem. Sumatur in mensura arbitraria $p\,E = \cot.\lambda$, atque radio $E\,p$ ex centro p describatur circulus $E\,e$, medium Parallelum exhibens... Abscin-

ſcindantur E D = E F = tang. 1°, E G = tang. 2°, etc. eruntque circuli ex centro p per D, F, G ducti Paralleli 1°, 2°, etc. a medio vtrinque diſtantes. Ponatur iam ſin. $\lambda = \mu$, pro radio = 1, et quaeratur chorda 5μ, 10μ, etc. graduum, ad radium E p = cot. λ in ſcala aſſumta pertinens, eaque ab E ad e, et ſic porro vtrinque abſcindatur: atque arcu E e in 5 vel 10 partes aequales diuiſo, et per diuiſionum puncta ad p rectis ductis, erunt illae Meridiani 1° a ſe inuicem diſtantes. Si regio proiicienda Aequatori ſit propinqua, radii E p majores fient, quam vt eorum ope ex centro p circuli duci commode queant. Sumatur tunc E p pro axe, E pro abſciſſarum initio, abſcindantur E $n = x$ et $n\,e = y$ in ratione ſinus verſi ad ſinum rectum ſicque tot puncta e determinentur, vt per ea circulus E $r\,e$ vel manu libera vel more vſitato mechanico duci poſſit: pariterque in ceteris Parallelis erit procedendum.

§. 5. Quodſi regio proiicienda ſit Zona Aequatorem includens, facile patet, Conum abire in Cylindrum Sphaeram tangentem. Fit nempe latus Coni E $p = \infty$, ſi $\lambda = 0$. Pro ceteris Parallelis eſt radius $p\,D = \frac{cos\,\beta}{sin.\,\lambda\,cos.\,\beta} = \frac{1}{0} = \infty$, vnde Aequator omnesque Paralleli proiiciuntur in lineas rectas, aeque ac Meridiani in rectas iis normales. Gradus latitudinis in eadem proportione tangentium vt ſupra creſcunt. Fit enim D E = tang. β.

§. 6. Inquiramus nunc, quomodo, quae ad bonam requiruntur proiectionem, per hanc obtineantur. Primo quidem requiſito, vt Meridiani Parallelis ſint normales, ſatisfit. Ad cetera quod attinet, ducatur meridianus $p\,\pi$, priori p F proximus, vt et Parallelus $\mu\nu$ Parallelo D δ infinite propinquus. Appelletur E D = x, arcus D $\delta = y$. Repraeſentet D δ longitudinem γ graduum, erit curuatura arcus D $\delta = \gamma°$ ſin. λ, vel in par-

partibus radii, $y = \gamma p$ D fin. $\lambda = \frac{\gamma \text{ cos. } \beta}{\text{cos. } (\beta - \lambda)}$, et $x =$ tang. $(\beta - \lambda)$, vnde

$$\partial x = \frac{\partial \beta}{\text{cos. } (\beta - \lambda)^2}, \quad \partial y = \frac{\partial \gamma \text{ cos. } \beta}{\text{cos. } (\beta - \lambda)},$$

adeoque $\partial x : \partial y = \partial \beta : \partial \gamma$ cos. β cos. $(\beta - \lambda)$, cum in Sphaera obtineat proportio, $\partial \beta : \partial \gamma$ cos. β. Vnde patet, quo minor $\beta - \lambda$, eo magis hanc proportionem cum genuina in Sphaera conuenire, ac prope Parallelum medium E e figuras minimas in proiectione et Sphaera perfecte esse similes. Ibi nempe Conus cum Sphaera coincidit, ac fit E m = tang. $(\beta - \lambda) = \beta - \lambda = \partial \beta$, et E $r = \partial \gamma$ E p fin. $\lambda = \partial \gamma$ fin. λ cot. $\lambda = \partial \gamma$ cos. λ, vti esse debebat. Ceterum est $\partial x \, \partial y = \frac{\partial \beta \, \partial \gamma \text{ cos. } \beta}{\text{cos. } (\beta - \lambda)^3}$, vnde et prope parallelum medium areas eadem proportione, quae in Sphaera obtinet, repraesentari patet.

§. 7. Cum circuli maximi, qui vel sunt meridiani, vel Aequator, proiiciantur aut in lineas rectas aut in circulum, quaeramus iam, in qualem lineam alius quisque circulus maximus proiiciatur. Cum ille per Sphaerae centrum transeat, ideoque omnium eius punctorum proiectiones per rectas e centro in eius plano ductas determinentur, totius circuli proiectio in Coni superficie nondum euoluta erit sectio conica, quae sicut ex natura Coni constat, si simul per axem transeat, praebet angulum rectilineum, si vero axi sit normalis, oritur circulus: neque aliter euenire poterat, dum priore casu circulus proiiciendus est Meridianus, posteriore Aequator. Ex Coni natura porro sequitur: si angulus, quem circulus ille cum Aequatore facit, fuerit aequalis angulo p E e = E C P = $90° - \lambda$, (Fig. 1.) proiectionem fore Parabolam; si vero angulus ille fuerit $> 90° - \lambda$, proiectionem fore Hyperbolam; Ellipsin autem, si angulus ille $< 90° - \lambda$. Cuiuscunque ergo circuli maximi proiectio in Cono erit aut angulus rectilineus, aut circulus, aut parabola, aut hyperbola,

bola, aut ellipſis, prout maxima eius latitudo ſeu inclinatio ad aequatorem fuerit $= 90°$, vel $= 0$, vel $= 90° - \lambda$, vel $> 90° - \lambda$, vel denique $< 90° - \lambda$. Primo atque ſecundo caſu natura proiectionis non mutatur coni ſuperficie in planum euoluta. Ceterae vero ſectiones conicae euolutione coni in lineas diuerſae naturae degenerant, imo fieri poſſunt transcendentes. Si enim (Fig. 3.) A M Q e ſit proiectio circuli C e (Fig. 1.), $p\,e$ meridianus P e, atque dicatur Q H $=$ Q P H $= \gamma$, H K $= \beta$, (Fig. 1.) $p\,\varepsilon = x$, (Fig. 3.) ε Q $= y$, et Q proiectio puncti K, habemus $Q\,p\,\varepsilon = \gamma°$ ſin. λ, $y = x$ tang. ($\gamma°$ ſin. λ), et

$$x^2 + y^2 = p\,Q^2 = \frac{cof.\,\beta^2}{ſin.\,\lambda^2\,(cof.(\beta - \lambda))^2} = \frac{1}{ſin.\,\lambda^2\,(cof.\,\lambda^2 + ſin.\,2\lambda\ tang.\,\beta + ſin.\,\lambda^2\ tang.\,\beta^2)};$$

inter β et γ denique hanc analogiam, tang. H K $=$ ſin. CH tg. KCH, vel poſito K C H $= \alpha$, tang. $\beta =$ tang. α cof. γ. Quoniam hic in vna aequatione γ, in altera γ ſin. λ occurrit, non niſi aequatio transcendens inter x et y obtinebitur, niſi forte ſin. λ valorem habeat rationalem. Statuamus e. gr. $\lambda = 30°$; erit $\frac{y}{x} =$ tang. $\frac{1}{2}\gamma$, adeoque ſin. $\frac{1}{2}\gamma = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, cof. $\frac{1}{2}\gamma = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, vnde elicitur cof. $\gamma = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; fietque hocce valore loco cof. γ, et tang. α cof. γ loco tang. β ſubſtitutis,

$$x^2 + y^2 = \frac{16\,(x^2+y^2)^2}{3\,(x^2+y^2)^2 + 2\,tang.\,\alpha\,\sqrt{3}\,(x^4-y^4) + tang.\,\alpha^2\,(x^2-y^2)^2}$$

ſeu $16\,(x^2+y^2) = 3\,(x^2+y^2)^2 + 2$ tang. $\alpha\,\sqrt{3}\,(x^4 - y^4) +$ tang. $\alpha^2\,(x^2-y^2)^2$.

§. 8. Si angulus α creſcat vsque ad $90°$, circulus C e abit in Meridianum P B (Fig. 1.), qui $90°$ diſtat a Meridiano P e ſeu noſtro axe $p\,e$. Aequatio vero noſtra diuiſa per (tang. α)^2, quia poſito $\alpha = 90°$, omnes termini prae vltimo euaneſcunt, praebet $x^2 - y^2 = 0$, vel $y = \pm x$. Proiicitur itaque

Meridianus P B in rectam p Q (Fig. 3.), quae axin secat sub angulo $Q\,p\,e = 45°$, ob $y = x$; prorsus vti esse debebat, cum angulus $Q\,p\,e$ sit $= \gamma$ sin. $\lambda = 45°$, ob $\gamma = B\,P\,e = 90°$, et sin. λ = sin. $30° = \frac{1}{2}$. Duplex valor ipsius y ex proiectione alterius partis Meridiani B P vltra P sese extendentis originem trahit.

Ponatur $a = 0$, vt proiectio sit Aequatoris, quam circulum esse oportet. Pro hocce casu aequatio nostra praebet: $x^2 + y^2 = \frac{16}{3}$, quae est aequatio pro circulo, cuius centrum est p, et radius $= \frac{4}{\sqrt{3}}$. Hic scilicet radius proiectionis est (Fig. 1.)

$$p\,M = p\,C \text{ sec. } C\,p\,M = \text{cosec. } \lambda \text{ sec. } \lambda = \frac{1}{\text{sin. } \lambda \text{ cos. } \lambda} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

sicut per aequationem inuenimus.

§. 9. Proiectionem nostram cum Delisliana non parum conuenire, solus intuitus vtriusque proiectionis iam docet. Differt autem nostra ab illa in eo, quod sit *proiectio* in sensu stricto, siquidem quoduis punctum per rectam ex oculo in certo puncto assumto ductam in tabulam proiicitur, quod in proiectione Delisliana aliter sese habet. Praeterea nostra a ceteris methodis eo differt, quod proiectionis tabula hic non sit Planum sed superficies conica. Cum porro in proiectione Delisliana centrum Parallelorum commune non sit Poli proiectio, sed aliquot gradus vltra eam situm sit, hinc sequitur, secundum hanc methodum Polum (si mappa eo vsque continuata supponeretur) in circulum proiici, cum ex nostra methodo Poli proiectio sit punctum, et quidem commune Parallelorum centrum.

§. 10. Quodsi iam regio proiicienda sit circumpolaris, Conus abit in Planum Sphaeram in Polo tangens, ac proiectio nostra

noſtra cum proiectione ſic dicta *centrali* coincidit. Eodem autem caſu tres proiectiones, centralis, ſtereographica, et Delisliana, ſi huic caſui adaptetur, haud ſenſibiliter differunt. Pro priore enim eſt cuiuscunque Paralleli, cuius a Polo diſtantia β, radius $=$ tang. β, pro ſecunda $=$ 2 tang. $\frac{1}{2}\beta$, ſi nempe tabula proiectionis non in centro ſed Sphaeram in Polo tangens aſſumitur. Quia vero β hic aliquot gradus non excedere ſtatuitur, eſt ſine errore perceptibili, 2 tang. $\frac{1}{2}\beta =$ tang. β.

Videamus adhuc, quomodo proiectio Delisliana huic caſui adaptetur. Sint (Fig. 2.) G g, E e, bini Paralleli principales, quorum gradus ſunt in proportione coſinuum latitudinis, vt in Sphaera. Si itaque diſtantia prioris a Polo $=\beta$, poſterioris $= b$, G g, E e arcus vnius gradus longitudinis, et longitudo aſſumta vnius gradus in Meridiano $=\delta$; erit G $g =$ δ ſin. β, E $e = \delta$ ſin. b, angulus G p $g = \frac{\alpha\,\delta\,\text{ſin. }\beta}{p\,G}$, vbi $\alpha = 57°.\ 17'.\ 44''.\ \ldots$, ſeu gradus, minuta, etc. quae arcus radio aequalis continet. Eodem modo erit E p $e = \frac{\alpha\,\delta\,\text{ſin. }b}{p\,E}$; qui anguli cum ſint aequales, habebimus $\frac{\text{ſin. }\beta}{p\,G} = \frac{\text{ſin. }b}{p\,E}$. Quia hic vero centrum p vltra Polum aſſumitur, ſit Polus in q, x gradus citra p, vt fiat $p\,q = x\,\delta$: vnde erit p G $= (\beta + x)\,\delta$, p E $= (b + x)\,\delta$, et aequatio noſtra: $\frac{\text{ſin. }\beta}{\beta + x} = \frac{\text{ſin. }b}{b + x}$, vnde reperitur $x = \frac{b\,\text{ſin. }\beta - \beta\,\text{ſin. }b}{\text{ſin. }b - \text{ſin. }\beta}$. Hinc ſtatim perſpicitur, x numquam fieri poſſe negatiuam, ſeu p non cadere poſſe infra Polum. Si enim numerator eſſet negatiuus, h. e. $\frac{b}{\text{ſin. }b} < \frac{\beta}{\text{ſin. }\beta}$, eſſe quoque oporteret $b < \beta$, quia omnis huiusmodi fractio $\frac{b}{\text{ſin. }b}$ eo eſt minor, quo minor arcus b: eſt igitur et ſin. $b <$ ſin. β, ſeu denominator negatiuus, adeoque x numquam valorem recipit negatiuum. Inſpiciamus autem, an fieri poſſit $x = 0$; tunc eſſe oportet

$b : \beta = \text{fin. } b : \text{fin. } \beta$, h. e. arcus esse debent in ratione sinuum, quod saltem de arcubus valde paruis dici potest, adeoque nostro casu poni potest $x = 0$. Tunc angulus Epe fit $= \frac{\alpha\delta \text{ fin. } \beta}{\delta\beta}$, vbi fin. β in partibus radii $= 1$, β vero in gradibus exprimitur. Loco β ergo sumi debet $\alpha\beta$, vt nempe β non gradus sed longitudinem arcus pro radio $= 1$ significet, vnde est

$$Epe = \frac{\text{fin. } \beta}{\beta} = 1^\circ,$$

quia nostro casu sinus ab arcubus vix differunt. Est itaque in projectione Delisliana non secus ac in ceteris, angulus, quem proiectiones duorum Meridianorum faciunt, idem, quem ipsi Meridiani in Sphaera formant. Ceterum est cuiuscunque Paralleli radius $= pG = \alpha\beta\delta$, vbi $\alpha\delta$ est radius vel vnitas assumta, quod sequitur ex proportione, $1^\circ : \delta = \alpha^\circ$ ad radium assumtum. Hinc $pG = \beta = \text{tang. } \beta = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\beta$. Vnde patet, omnes istas proiectiones prope Polum conuenire, atque paruum segmentum polare in eadem proportione ac in ipsa Sphaera repraesentari.

§. 11. Supra iam monui, casu, quo regio proiicienda est Zona Aequatorialis, Conum abire in Cylindrum, Parallelos et Meridianos in lineas rectas inter se normales. Quodsi vnus gradus circuli maximi dicatur δ, erit in Aequatore omnibusque Parallelis vnus gradus longitudinis $= \delta$, siquidem integra Aequatoris peripheria in rectam euoluta in 360 partes aequales est diuidenda. Si vero ACN (Fig. 1.) $= 1^\circ$, erit in proiectione $AN = \text{tang. } 1^\circ$, et gradus latitudinis in ratione tangentium crescunt. Assumto ergo Aequatore pro axe, et nuncupatis abcissis x, ordinatis orthogonalibus y, longitudine γ, latitudine β, erit $x = \gamma$, $y = \text{tang. } \beta$, $\partial x = \partial\gamma$, $\partial y = \frac{\partial\beta}{\cos.\beta^2}$, adeo-

adeoque $\partial x : \partial y = \partial\gamma \cos.\beta^2 : \partial\beta$, cum proportio in Sphaera fit $\partial\gamma \cos.\beta : \partial\beta$. Eſt porro differentiale areae $= \partial x\, \partial y = \frac{\partial\beta\, \partial\gamma}{\cos.\beta^2}$, in Sphaera $\partial\beta\, \partial\gamma \cos.\beta$.

§. 12. Ceterum patet, vnum dari caſum, vbi haec proiiciendi methodus maiore cum vtilitate quam alia vlla adhiberi poſſe videtur; nimirum ſi pars globi terraquei proiicienda ſit Zona mediocris latitudinis.

DE PROIECTIONE SPHAERAE AD DETERMINANDAM AREAM MAXIME IDONEA.

Auctore.
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 24 Mai 1787.

§. 1.

Varii sunt fines, quibus mappae geographicae accurate delineatae inseruire possunt; qui cum vnica mappa obtineri nequeant omnes, sat multae iam excogitatae sunt proiectionis methodi, quarum singulae certo cuidam fini sunt accommodatae. Sic e. gr. haec proiectio ad determinandam Loxodromiam aptissima in mappis nauticis merito eligitur; illa in figura prouinciarum legitime repraesentanda ceteris antecellit, alia locorum distantias quam fieri potest accuratissime exhibet, etc. Vnde sane opus foret haud inutile, si cuiuscunque prouinciae tot diuersae componerentur proiectiones, quot fines sunt obtinendi. At nemo vnquam, quantum equidem sciam, in delineandis mappis geographicis areae determinandae peculiarem habuit rationem, sed omnes calculo hunc in finem instituendo fuere contenti, qui licet non parum tediosus atque molestus, nihil tamen praebet certi, quoniam in limitibus prouinciarum aestimatione opus est, quae in mappis vsitatis falso nititur principio. Quanti vero sit momenti accurata areae prouinciarum notitia

notitia Geographo non minus quam Philoſopho et Politico, non eſt quod dicam. Erudito inprimis, qui ſtatuum notitiam ſtudium ſibi fecit proprium, gratum erit atque acceptum, ſi facilis ei ſuppeditetur methodus, qui poſſit absque calculo aream ipſe idque accurate inuenire, adeoque Mathematicis credere non ſit coactus. Quamobrem non parum miratus ſum, nunquam adhuc adhibitam fuiſſe proiectionem, quam immediate atque accuratiſſime oculis offerre aream ſuperficiei delineatae, iam dudum in Commentariis Acad. Petrop. monuit immortalis nominis *Eulerus*. Officium mihi impoſitum requirere putaui, vt huiusmodi conficerem proiectionem, quae aream imperii Ruſſici, tantae telluris partis, calculo minutiſſimo oſtendat exactius. Sollertius in proiectionis huius indolem inquirens animaduerti, eam paululum immutatam reddi adhuc poſſe vtiliorem; id quod Academiae hic proponere mihi liceat, etſi temporis breuitas mihi nondum permiſit, totius imperii Ruſſici proiectionem abſoluere.

§. 2. Repraeſentet Fig. 4. portionem telluris, C Polum, AQ Aequatorem, CN, Cn duo Meridianos infinite propinquos. Per punctum M pro arbitrio aſſumtum tranſeat Parallelus Mμ, cui infinite propinquus Parallelus $m\nu$, vt ſiat paruum rectangulum Mν elementum areae telluris. Quodſi iam longitudines computentur a Meridiano CA, dicatur longitudo puncti M, AN $= x$, latitudo NM $= y$, area telluris $= S$; eritque $\partial S = M\mu . M m = \partial x \cos. y \partial y$, poſito radio telluris $= 1$. In Fig. 5. Meridiani ac Paralleli ſint proiecti in lineas rectas ſibi inuicem normales, ſecundum hanc legem: Aequator A′ Q′ diuiditur in ſingulos gradus A′D, qui competunt radio arbitrarie aſſumto, quem dicamus r. Latitudines autem aequantur ſinubus ſuis pro radio $= r$. Poſito itaque gradu longitudinis A′D $= a$, erit $a = \alpha r$, exiſtente α numero expri- Tab. III.

primente arcum vnius gradus in partibus radii $= 1$. Vnde fit $a = \frac{\pi r}{180}$, et $r = \frac{180}{\pi} a$. Iam vero pro qualibet latitudine y eſt $N'M' = r \sin. y = \frac{180}{\pi} a \sin. y$, et $A'N' = r x$, ideoque $M'\mu' = r \partial x$, et $M'm' = r \cos. y \partial y$. Quodſi itaque area in proiectione dicatur s, erit $\partial s = r r \partial x \cos. y \partial y$. Differentialia ∂S et ∂s ſunt in ratione duplicata radiorum: in eadem ergo ratione erunt quoque integralia S et s, h. e. cuiuscunque partis proiectionis area erit proportionalis areae reſpondenti in telluris ſuperficie.

§. 3. Hinc methodus oritur plane mechanica, inueniendi aream portionis telluris. In carta oleo imbuta conſtruatur rectangulum, eiusque latera diuidantur in partes aequales, quarum quaeuis $= a$, ita vt tota figura diuiſa ſit in Quadrata, quorum ſingula $=$ vni gradui quadrato $= 225$ milliaribus $\square$. Haec carta proiectioni impoſita immediate dat aream. Eiusmodi proiectionem imperii Ruſſici rudem adhuc et tantum ſpeciminis inſtar confeci. Ne autem opus eſſet diuiſiones Meridiani e formula $N'M' = \frac{180}{\pi} a \sin. y$ computare, diuiſi ſcalam in gradus, minuta prima, etc. quorum ſinguli gradus $= a$; in qua ſcala cum longitudines tum latitudines cepi, priores quidem immediate, at latitudines modo ſequente: Ope tabulae, qualis habetur in *collectionis Berolinenſis tabularum aſtron.* Tom. III. p. 172—207. gradus, minuta prima, etc. inueni quibus ſinguli ſinus aequantur. Qui gradus, etc. in ſcala capti praebent Ordinatas $N'M'$. Diuiſio itaque mappae ſeu conſtructio reticuli, quae in ceteris proiectionibus plurimum difficultatis mouet, in noſtra eſt facillima. Mox autem aliud incommodum ſeſe obtulit. Creſcente latitudine ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis adeo decreſcit, vt vel optimis inſtrumentis inſtructus variationem latitudinis haud nimis magnam exprimere nequeas. Cum e contrario

trario in Sphaera ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis cum latitudine creſcat, hinc non ſolum figura partis delineatae prorſus difformatur, ſed ipſa quoque proiectio admodum difficilitatur. Minutiſſime licet facta mappae diuiſione, tamen oculi iudicium ſequi oportet, vnde delineatio non poteſt non fieri multo accuratior, ſi figura partis delineatae ſimilis ſit figurae ſuperficiei ſphaericae. Area praeterea multo exactius poſſet menſurari, ſi gradus latitudinis poſſent ampliari: vt nil dicam de forma magis commoda, quam mappa ſic indueret. Quae omnia incommoda ſic tolli poſſunt.

§. 4. Si manente $A'N' = rx$, fiat $N'M' = mr \text{ ſin.} y$, erit $\partial s = mrr \text{ cof.} y \, \partial x \, \partial y$, ita vt quae ex menſura §. 3. reperta eſt area, ſit diuidenda per m. Numerus m equidem ab arbitrio noſtro pendet, dummodo ſit > 1, per §. 3. Quo vero proiectio ſuperficiei ſphaericae, quantum fieri poſſit, reddatur ſimilis, numerum m ſic determinaui. Pars telluris proiicienda ſit incluſa inter Meridianos C A, C Q, atque Parallelos B P, $b\,p$, (Fig. 4.). Capiatur $B\beta = P\pi = \frac{1}{2} B\,b = \frac{1}{2} P\,p$, ac ponatur $AQ = \gamma$, $Ab = \alpha$, $AB = \beta$; erit $A\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \mu$, $\beta\pi = \gamma \text{ cof.} \mu$, et $B\,b = \alpha - \beta$. In proiectione (Fig. 5.) fit $\beta'\pi' = r\gamma$, $A'b' = mr \text{ ſin.} \alpha$, $A'B' = mr \text{ ſin.} \beta$, ideoque $B'b' = mr(\text{ſin.} \alpha - \text{ſin.} \beta)$. Quo iam proiectio Originali fiat ſimilis, quod quidem exacte obtineri nullo modo poſſe conſtat, tentandum eſſet, an partes minimae proiectionis ac Sphaerae euadere poſſint ſimiles. Quem in finem eſſe oporteret

$$M\mu : M m = M'\mu' : M' m', \text{ h. e.}$$

$$\partial x \text{ cof.} y : \partial y = \partial x : m \, \partial y \text{ cof.} y,$$

ſeu $\text{cof.} y^2 = \frac{1}{m}$, vnde patet, hanc proportionem non niſi in vnico Parallelo locum habere poſſe, cuius nempe latitudinis coſinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$. Nihil itaque ſupereſt niſi vt certo cuidam

parallelo debita ad Meridianum tribuatur ratio; qui quidem Parallelus optime certe sumitur medius. Statuatur ergo

$$\beta\pi : B\,b = \beta'\pi' : B'\,b', \text{ h. e.}$$

$$\gamma \cos.\mu : \alpha - \beta = \gamma : m\,(\sin.\alpha - \sin.\beta),$$

vnde habetur $m = \frac{\alpha-\beta}{\cos.\mu\,(\sin.\alpha - \sin.\beta)}$. Pro imperio Russico, cuius latitudo a 45° vtque ad 75° circiter sese extendit, sumi potest $\mu = 60°$, ideoque $\cos.\mu = \frac{1}{2}$, et $m = \frac{2(\alpha-\beta)}{\sin.\alpha - \sin.\beta} = \frac{60°}{\sin.75° - \sin.45°}$. Vbi vero $\alpha-\beta$ in partibus radii exprimi oportet ope tabularum satis obuiarum. Calculus praebet:

$60° = 1{,}047198$	$l\,60° = 0{,}0200289$
$\sin.75° = 0{,}9659258$	$l(\sin.75° - \sin.45°) = 9{,}4172961$
$\sin.45° = 0{,}7071068$	$l\,m = 0{,}6070328$
$\sin.75° - \sin.45° = 0{,}2588190$	$m = 4{,}046\ldots$ seu $m = 4$.

Quia sic euenit, vt m sit numerus quadratus, ad euitandam diuisionem per m, in diuidenda carta oleo madefacta statim capi potest vnus gradus $= a\sqrt{m} = 2a$.

Quia sub latitudine, cuius cosinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$, partes minimae proiectionis ac Sphaerae similes sunt, hanc similitudinem in mappa imperii Russici sic delineata obtinere sequitur circa parallelum 60 graduum, ob $\sqrt{m} = 2$; h. e. in ipso parallelo medio $\beta\pi$.

§. 5. Eodem modo pro aliis quoque regionibus computaui numerum m atque inueni:

pro Suecia et Norwegia - - - -	$m = 5$,
Britannia et Hibernia - - - -	$m = 3$,
Polonia et Borussia - - - -	$m = 2\frac{3}{4}$
Germania - - - - - -	$m = 2\frac{1}{2}$

Gallia

Gallia - - - - - - - - $m = 2$,
Italia, Hiſpania ac Luſitania,
Hungaria et Turcia - - - - $m = 1\frac{3}{4}$.

Pro regionibus Aequatori propinquis, ceu Africa, Aſia citra Ruſſicam, et media Americae parte, ſtatui poteſt $m = 1$. Quodſi vniuerſa Sphaera eſſet proiicienda, foret $AC : AQ = 90 : 360 = 1 : 4$, et $A'C' : A'Q' = mr : 2\pi r$. Vnde eſſe oportet $m = \frac{1}{4}\pi = 1{,}570796\ldots$, ſeu $m = 1\frac{1}{2}$.

§. 6. Donec otium mihi detur mappam totius Ruſſiae ſatis magnam delineandi, ſpecimen tamen Academiae proponere volui, quem in finem elegi *Nouam Zemlam* atque *Kamczatkam*. Pro priore inueni calculo $m = 13{,}5$. pro Kamczatka $m = 3$. Ceterum vtraque ſecundum eandem proiecta eſt menſuram, ſeu gradus longitudinis ſunt aequales. Cartam oleo imbutam diuiſi in Quadrata, quorum latus $= 20'$, ſeu 5 milliaria geographica, vt adeo quodnis quadratum habeat aream 25 milliarium □, ſeu 1213, 36 Verſtarum □. Eiusmodi quadrata pars *Nouae Zemlae* ſeptentrionalis continet 1026, 29; meridionalis 1286, 05; et *Kamczatka* 477, 9. Bini priores numeri diuiſi per $13\frac{1}{2}$, et tertius per 3, ſequentia praebent quota: 76, 02; 95, 26; 159, 3; vnde ſequentes reſultant areae:

pro parte Nouae Zemlae ſeptentrionali - -	= 1900,5 mill. □	= 92239,7 V. □
pro parte Nouae Zemlae meridionali - -	= 2381,5 - -	= 115584,8 —
ideoque pro tota inſula Noua Zemla - - -	= 4282,0 - -	= 207824,5 —
et pro peninſula Kamczatka	= 3982,5 - -	= 193288,4 —

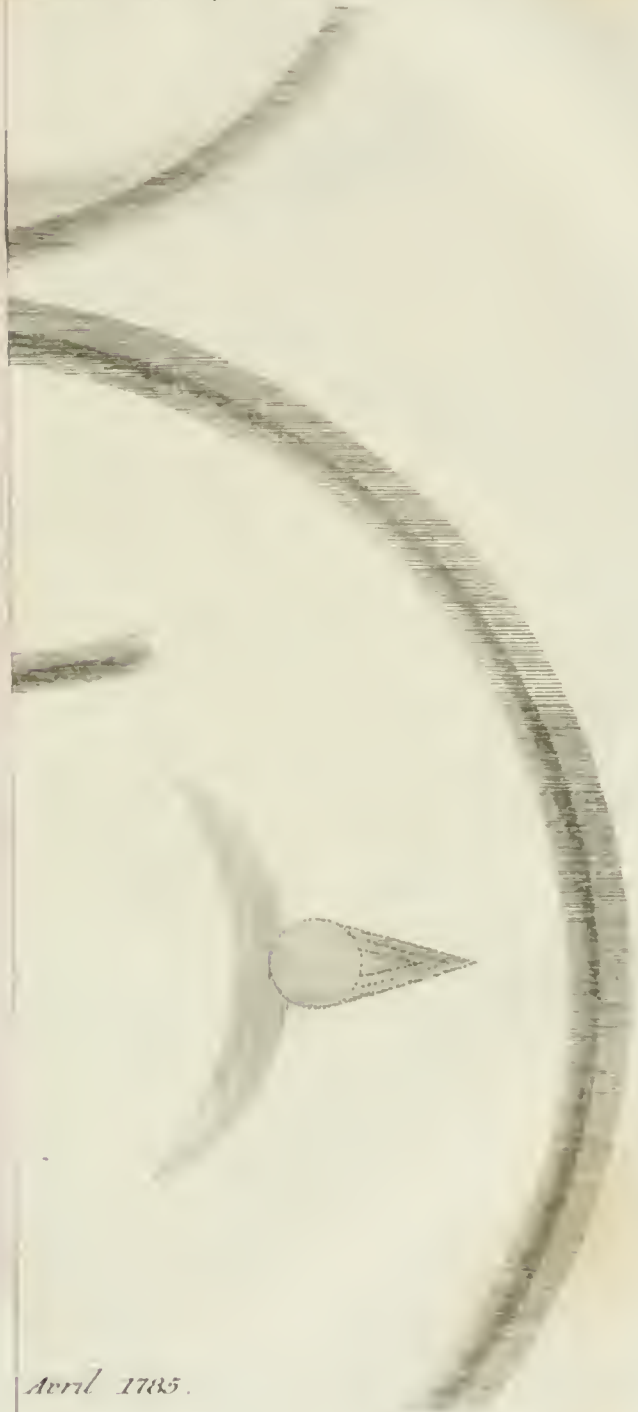
§. 7. Ceterum notari meretur, breuiore adhuc via ad ſcopum peruenire poſſe, qui ſummam exactitudinem non requirit. Ea nempe quadrata cartae oleo imbutae inſcripta, quae partim intra partim extra mappae limites cadunt aut denuo ſunt diuidenda, aut aeſtimatione iudicandum, quanta cuiusuis pars intra mappae limites cadat: atque hoc quidem negotium ſolum eſt, quod difficultate non caret. Quamobrem numerare conuenit omnia quadrata, quotquot mappam tegunt, ac ſummae illorum, quorum pars duntaxat intra mappae limites cadit, ſumere dimidium. Tentamen hoc feci in mappa Nouae Zemlae. Erant nempe 2054 quadrata, quae tota, at 481, quae nonniſi partim intra mappae limites cadebant. Horum pars dimidia eſt $= 240,5$. Per ſubdiuiſionem autem et aeſtimationem hanc ſummam ſupra inueneram $= 258,3$. Differentia $= 17,8$ per $13\frac{1}{2}$ diuiſa et per 25 multiplicata dat errorem $= 33$ milliar. □. Qui error ſatis leuis prorſus fortaſſe tolli poſſet, ſi rectangulum mappae ſaepius diuerſis modis imponeretur, exque omnibus hisce ſummis medium ſumeretur.

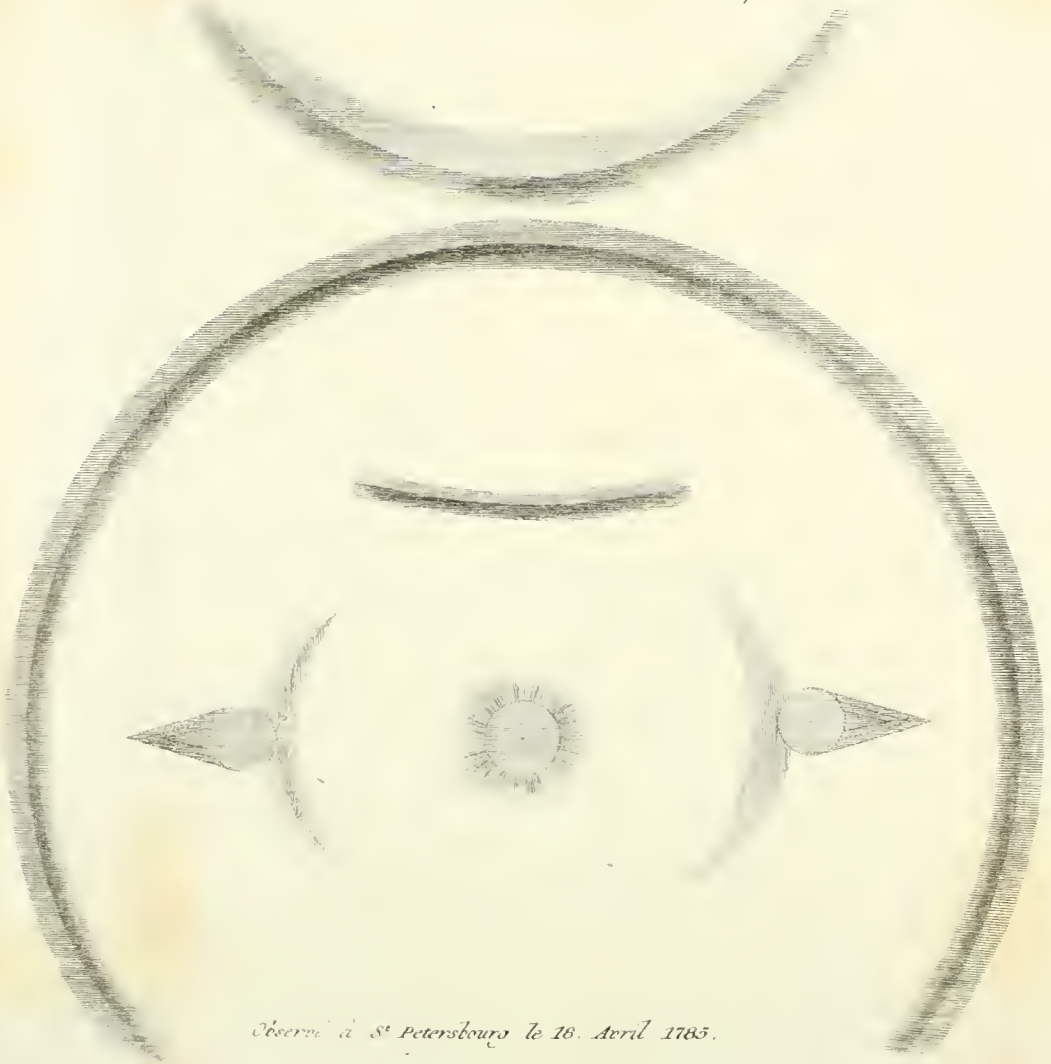
§. 8. Ad euitandum laborem, quem areae menſuratio requirit, nonnulli mappam e carta, in qua erat delineata, excindere ſolent, eiusque pondere ope librae ſatis accuratae reperto, et cum pondere cartae, cuius area eſt cognita, comparato, aream determinare. Haec methodus in mappis vulgari modo conſtructis non ſine inſigni errore, in noſtra commodiſſime poterit adhiberi, inprimis ſi carta eligatur laeuis ac vniformis, eaque liquore ſeu alia materia homogenea obducatur, quo partim vniformior, partim ſpecifice grauior reddatur carta.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

PHYSICO-
MATHEMATICA.





Observé à St. Petersbourg le 16. Avril 1785.

CONSIDERATIO
MOTVS PLANE SINGVLARIS,
QVI IN FILO PERFECTE FLEXILI LOCVM HABERE POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 5. Iun. 1775.

§. 1.

Quanquam theoria non ſolum aequilibrii ſed etiam motus pro omnibus filis tam perfecte flexibilibus quam etiam elaſticis ita perfecte ſit explorata, vt nihil amplius deſiderari poſſe videatur: tamen formulae pro motu determinando traditae etiamnunc omni vſu caruerunt; cum pro nullo adhuc caſu motus huiusmodi filorum definiri potuerit exceptis ſolis illis caſibus, quibus talia fila motum reciprocum ſeu oſcillatorium eumque adeo infinite paruum recipere valent. Huius autem defectus cauſa neutiquam theoriae mechanicae eſt tribuenda ſed vnica imperfectioni analyſeos adſcribi debet: ita vt ante vix quicquam in hoc genere ſperari poſſit, quam ſcientia analyſeos inſignia incrementa acceperit.

§. 2. Quin etiam caſus ſimpliciſſimus, quo motus fili perfecte flexilis a nullis plane viribus ſollicitati in eodem plano concitari poteſt, nullis adhuc artificiis a me quidem adhibitis

bitis expediri potuit. Quod quidem eo minus eſt mirandum, cum ſi loco fili conſiderentur plures virgae ita inuicem iunctae, vt circa iuncturas liberrime commoueri queant, motus nullo adhuc modo perfecte aſſignari potuerit, ſtatim ac plures duabus virgis hoc modo fuerint coniunctae.

Tab. IV. Fig. 1. §. 3. Quo igitur ſummas has difficultates penitius perſpiciamus, conſideremus filum quodcunque flexile E Y F quod a viribus quibuscunque ſollicitatum in ipſo plano tabulae vtcunque promoueatur, et ſumta in hoc plano recta fixa O A, pro axe habenda, elapſo tempore t teneat filum ſitum in figura exhibitum E Y F, a cuius puncto quocunque indefinito Y ad axem ducatur normalis Y X, vocenturque coordinatae $OX = x$ et $XY = y$, ipſa autem portio fili $EY = s$, vt ſit $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Tum vero hoc tempore fili elementum $Yy = \partial s$ ſollicitetur a duabus viribus $YP = P\partial s$ et $YQ = Q\partial s$, quarum directiones ſint coordinatis parallelae. Quibus poſitis manifeſtum eſt, ambas coordinatas x et y ſpectari debere tanquam functiones duarum variabilium, arcus ſcilicet $EY = s$ ac temporis t. Vnde ſumto tempore t conſtante, vt fili figura quam ipſo tempore tenet exploretur, erit per ea quae de functionibus duarum variabilium iam ſatis ſunt explicata, $\partial x = \partial s \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)$ et $\partial y = \partial s \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$, hincque ergo $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$. At vero ſumto ſolo tempore t variabili, manente arcu $EY = s$ inuariato, coordinatae x et y pro eodem fili puncto Y ita variabunt, vt ſit $\partial x = \partial t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ et $\partial y = \partial t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, vbi notetur formulam $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ exprimere celeritatem puncti y ſecundum directionem YP, et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ celeritatem ſecundum directionem YQ, vnde porro acceleratio motus pro puncto Y ſecundum directionem YP erit $= \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right)$ et ſecundum directionem $YQ = \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right)$. Praeterea

terea vero hic erit monendum, etiam ipſas vires ſollicitantes P et Q vtcunque a tempore t pendere poſſe.

§. 4. His expoſitis ſecundum praecepta pro motu huius fili tradita ex viribus ſollicitantibus deriuentur iſti valores:

$$P' = P - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapſus grauium pro vno minuto ſecundo, ſiquidem tempus t in minutis ſecundis exprimere lubuerit. Tum vero hic littera s non ſolum nobis longitudinem arcus E Y ſed etiam eius pondus denotare aſſumitur, quandoquidem filo per totam longitudinem eandem craſſitiem tribuimus.

§. 5. Per has autem quantitates deriuatas P' et Q' totus fili motus ex hac aequatione ſatis ſimplici inueſtigari debet

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P'\,\partial s - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q'\,\partial s = 0.$$

In quibus formulis integralibus ſola quantitas s pro variabili eſt habenda, tempore t manente conſtante. Hinc igitur ſi loco P' et Q' ſubſtituamus eorum valores, aequatio noſtra pro motu determinando erit

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

Praeterea vero ſi tenſio fili hoc tempore in puncto Y ponatur $= T$, erit

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P'\,\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q'\,\partial s, \text{ ſiue}$$

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

§. 6. Quod ſi ergo filum a nullis plane viribus ſollicitari ponamus, ita vt motus fili flexilis ſuper plano horizontali vtcunque proiecti determinari debeat, ob vires $P = 0$ et

$Q = 0$, tota motus determinatio pendebit a reſolutione huius aequationis ſatis ſimplicis:

$$0 = (\tfrac{\partial y}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}) - (\tfrac{\partial x}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2}),$$

quae autem quomodo tractari debeat nullo plane modo perſpicitur. Tum vero tenſio euadet:

$$T = \tfrac{1}{2g} (\tfrac{\partial x}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}) + \tfrac{1}{2g} (\tfrac{\partial y}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2}).$$

Quamobrem Geometrae erunt hortandi, vt omnes vires intendere velint ad reſolutionem huius aequationis expediendam.

§. 7. Equidem meos conatus etiam irritos hic communicare non dubito dum forte aliis occaſionem praebere poterunt feliciori ſucceſſu hunc laborem exſequendi. Primo igitur mihi erat propoſitum, hanc aequationem:

$$(\tfrac{\partial y}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}) = (\tfrac{\partial x}{\partial s}) \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2}),$$

a formulis integralibus liberare, quem in finem loco functionum x et y alias u et v in calculum introduxi, ponendo

$$\int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}) = (\tfrac{\partial \partial u}{\partial t^2}) \text{ et } \int \partial s \, (\tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2}) = (\tfrac{\partial \partial v}{\partial t^2}),$$

hinc autem differentiando ſola variabili adhibita s, prodibit

$$\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2} = \tfrac{\partial^3 u}{\partial s \, \partial t^2} \text{ et } \tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2} = \tfrac{\partial^3 v}{\partial s \, \partial t^2}.$$

Hinc autem porro colligemus, dum nunc ſolam t vt variabilem ſpectamus, cum ſit $\partial t \, (\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}) = \partial t \, (\tfrac{\partial^3 u}{\partial s \, \partial t^2})$, erit integrando $(\tfrac{\partial x}{\partial t}) = (\tfrac{\partial \partial u}{\partial s \, \partial t}) + E$, quae conſtans E etiam arcum s vtcunque in ſe complecti poteſt, eodemque modo erit $(\tfrac{\partial y}{\partial t}) = (\tfrac{\partial \partial v}{\partial s \, \partial t}) + F$. Hae aequationes porro ducantur in ∂t ac denuo integrentur manente s conſtante, prodibit

$$x = (\tfrac{\partial u}{\partial s}) + E\,t + G \text{ et } y = (\tfrac{\partial v}{\partial s}) + F\,t + H,$$

vbi E, F, G, H poſſunt eſſe functiones ipſius s tantum.

§. 8.

§. 8. Hos valores denuo differentiemus ſumta ſola s pro variabili ac poſitis breuitatis gratia $\partial E = E' \partial s$, $\partial F = F' \partial s$, $\partial G = G' \partial s$ et $\partial H = H' \partial s$, obtinebimus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) + E' t + G' \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} + F' t + H'.$$

Quare cum eſſe oporteat $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, omiſſis functionibus adiectis E, F, G, H, requiritur vt fiat $\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Tum vero ipſa aequatio pro motu induet hanc formam:

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

vbi quidem breuitati conſulentes functiones illas arbitrarias ipſius s praetermiſimus. Simili modo pro tenſione habebimus:

$$T = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right).$$

§. 9. Totum ergo negotium iam huc eſt reductum, quemadmodum ambas functiones ipſarum s et t, quas poſuimus u et v, comparatas eſſe oporteat, vt fiat

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

ſiue vt haec proportio non parum elegans locum habeat:

$$\frac{\partial \partial u}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial v}{\partial t^2},$$

cui quidem conditioni haud difficulter infinitis modis ſatisfieri poteſt. At vero altera conditio adimplenda nunc maximae difficultati videtur obnoxia, vt ſcilicet euadat $\left(\frac{\partial \partial x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Hinc igitur manifeſto perſpicitur, hunc caſum, qui ſine dubio in hoc genere tanquam ſimpliciſſimus eſt ſpectandus, tantis difficultatibus ac tenebris etiamnunc eſſe inuolutum, vt nulla plane via pateat ad ſcopum optatum perueniendi.

§. 10. Talis reductio etiam in genere fieri poteſt in aequatione latiſſime patente:

$$2g\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - 2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

atque adeo facilius ita inſtituetur. Ponatur ſtatim $x = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$ et $y = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)$. Hinc igitur erit $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s^2}\right)$, ita vt nunc eſſe debeat $\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s^2}\right) = 1$. Porro vero erit $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s\,\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s\,\partial t}\right)$, quae formulae exprimunt celeritates puncti Y ſecundum directiones Y P et Y Q. Tum vero habebimus inſuper $\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s\,\partial t^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s\,\partial t^2}\right)$, atque nunc integratio ſuccedit: erit enim

$$\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\right) + \Gamma : t \text{ et}$$

$$\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial t^2}\right) + \Delta : t,$$

vbi functiones quascunque temporis loco conſtantium ſunt adiectae, propterea quod in iſtis integrationibus tempus t vt conſtans eſt ſpectatum. Quamobrem ſi vires P et Q etiam x vel y inuoluunt, hoc modo tota aequatio inter binas functiones u et v ſubſiſtet.

§. 11. Nihilo vero minus nullum adhuc fructum mihi quidem hinc percipere licuit, ac praecipua huius difficultatis cauſſa in hoc ſita eſſe videtur: quod innumeras figuras diverſas quas filum ſucceſſiue induit, vix vllo modo ita per calculum exprimere licet, vt ad quoduis tempus definiri queat quales functiones ipſarum s et t binae coordinatae x et y ſint futurae. Hanc ob rem iſtud argumentum ordine inuerſo tractare inſtitui, dum ſcilicet ad quoduis tempus figuram fili tanquam datam ſpectabo atque in vires P et Q inquiram, quae filo talem motum imprimere valeant.

Status quaeſtionis.

Tab. IV. Fig. 2. §. 12. Sumamus igitur initio, vbi erat $t = 0$, filum ſuper plano horizontali in directum fuiſſe extenſum, ita vt ſitum

tum tenuerit E F, eiusque longitudinem E F ſtatuamus $= a$. Hinc vero elapſo tempore $= t$ acceperit figuram E Y F', quae ſit arcus circularis rectam E F pro axe aſſumtam tangens in ipſo puncto E, ita vt fili terminus E perpetuo maneat immotus. Radius autem huius circuli ſit E O $= r$, functio quaecunque data temporis t, vnde neceſſe eſt vt poſito $t = 0$ iſta functio r euadat infinita. Sit nunc E Y portio quaecunque indefinita fili $= s$, ductoque radio O Y erit angulus E O Y $= \frac{s}{r}$, cuius ſinus erit $\frac{EX}{EO} = \frac{x}{r}$, coſinus vero $1 - \frac{y}{r}$, vnde coordinatae E X $= x$ et X Y $= y$ ita per binas variabiles s et t exprimentur, vt ſit $x = r$ ſin. $\frac{s}{r}$ et $y = r(1 - \text{cof}. \frac{s}{r})$. Quibus poſitis quaeſtio ſoluenda huc redit: vt inueſtigentur vires P et Q, quae filo talem motum qualem hic deſcripſimus inducere valeant. Quae quidem quaeſtio maxime adhuc erit indeterminata, propterea quod pro motu determinando vnicam tantum habemus aequationem:

Tab II. Fig. 2.

$$2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - 2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

vnde alterutra quantitatum P et Q arbitrio noſtro relinquetur.

Euolutio formularum
in hanc aequationem ingredientium.

§. 13. Cum littera r ſit functio temporis t tantum, ſumta ſola s variabili impetrabimus has formulas $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \text{cof}. \frac{s}{r}$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \text{ſin}. \frac{s}{r}$, vnde ſponte fit $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, vti rei natura poſtulat. Sumto autem ſolo tempore t variabili ponamus breuitatis gratia $\partial r = r'\,\partial t$, ac differentiando reperiemus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = r' \text{ſin}. \frac{s}{r} - \frac{r's}{r} \text{cof}. \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = r'(1 - \text{cof}. \frac{s}{r}) - \frac{sr'}{r} \text{ſin}. \frac{s}{r}.$$

§. 14. Hae formulae cum ambas celeritates puncti Y exprimant, hinc iſtas celeritates pro ſtatu fili initiali, vbi erat $t = 0$ filumque in directum extenſum, cognoſcere licebit, id quod patebit ſi ſtatuamus $r = \infty$. Tum igitur erit ſin. $\frac{s}{r} = \frac{s}{r}$ et cof. $\frac{s}{r} = 1 - \frac{ss}{2rr}$, ex quo pro hoc caſu erit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{r' s^3}{2r^3} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{r' ss}{2rr}.$$

Videndum igitur eſt, num iſtae formulae caſu $r = \infty$ ſeu $t = 0$ valores finitos recipere queant nec ne, id quod ab indole functionis r pendet. Veluti ſi ſit $r = \frac{1}{t^n}$ ita vt exponens n ſit poſitiuus, quoniam poſito $t = 0$ fieri debet $r = \infty$, eritque $r' = -\frac{n}{t^{n+1}}$, hoc caſu habebitur

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} n s^3 t^{2n-1} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = +\tfrac{1}{2} n s s t^{n-1}.$$

Hinc ergo intelligitur ſi n ſit 1 fore

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} s^3 t = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \tfrac{1}{2} n s s.$$

Quo igitur caſu ſola celeritas $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ euaneſcit. At ſi fuerit $n = \frac{1}{2}$, fiet $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4} s^3$. Altera vero $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{ss}{4\sqrt{t}} = \infty$. Hinc igitur patet, pro indole functionis r euenire poſſe vt celeritates initiales modo fiant $= 0$, modo determinatum obtineant valorem, modo etiam in infinitum excreſcant, ſolo termino E ipſo excepto vbi $s = 0$, ille enim certe quieuiſſe neceſſe eſt.

§. 15. Progrediamur nunc etiam ad differentialia ſecunda ſumendo ſolum t variabile, quem in finem ſtatuamus $\partial r' = r'' \partial t$, et ſubducto calculo reperiemus:

$$\left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r''' \text{ ſin. } \frac{s}{r} - \frac{r'' s}{r} \text{ cof. } \frac{s}{r} - \frac{r' r' ss}{r^3} \text{ ſin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' (1 - \text{cof. } \tfrac{s}{r}) - \frac{r''}{r} s \text{ ſin. } \frac{s}{r} + \frac{r' r' ss}{r^3} \text{ cof. } \frac{s}{r}.$$

§. 16.

§. 16. Nunc igitur has formulas ducamus in ∂s easque ita integremus vt ſola quantitas s pro variabili habeatur, ac reperiemus:

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r'' \int \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \, \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} - \frac{r' r'}{r s} \int s \, s \, \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \Gamma : t,$$

eodemque modo

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' s - r'' \int \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \, \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \frac{r' r'}{r^3} \int s \, s \, \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} + \Delta : t,$$

vbi loco conſtantium adiecimus functiones quascunque ipſius t, propterea quod tempus ſpectatum eſt vt conſtans.

§. 17. Supereſt igitur tantum vt formulas integrales euoluamus, hoc modo:

$$\int \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} = - r \text{ coſ.} \frac{s}{r}; \quad \int \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} = r \text{ ſin.} \frac{s}{r};$$

$$\int s \, \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} = r s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + r r \text{ coſ.} \frac{s}{r};$$

$$\int s \, \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} = - r s \text{ coſ.} \frac{s}{r} + r r \text{ ſin.} \frac{s}{r};$$

$$\int s s \, \partial s \text{ ſin.} \frac{s}{r} = - r s s \text{ coſ.} \frac{s}{r} + 2 r r s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + 2 r^3 \text{ coſ.} \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\int s s \, \partial s \text{ coſ.} \frac{s}{r} = r s s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + 2 r r s \text{ coſ.} \frac{s}{r} - 2 r^3 \text{ ſin.} \frac{s}{r}:$$

hinc igitur erit

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = - 2 \text{ coſ.} \frac{s}{r} (r r'' + r' r') - s \text{ ſin.} \frac{s}{r} (r'' + \frac{2 r' r'}{r}) + \frac{r' r' s s}{r r} \text{ coſ.} \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = - 2 \text{ ſin.} \frac{s}{r} (r r'' + r' r') + s (r'' + (r'' + \frac{2 r' r'}{r}) \text{ coſ.} \frac{s}{r}) + \frac{r' r' s s}{r r} \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \Delta : t.$$

§. 18. Nunc igitur ad aequationem noſtram conſtituendam prior formula ducatur in $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \text{ſin.} \frac{s}{r}$ altera vero in $-(\partial x)$

$-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -\text{cof.}\frac{s}{r}$, et membrum dextrum aequationis noſtrae euadet

$$-r''s\,\text{cof.}\frac{s}{r} - \left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s + \text{ſin.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t - \text{cof.}\frac{s}{r}\,\Delta : t,$$

quoniam igitur membrum ſiniſtrum eſt

$$2g\,\text{ſin.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - 2g\,\text{cof.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s,$$

aequatio, ex qua tota motus natura eſt definienda, erit

$$2g\,\text{ſin.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - 2g\,\text{cof.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s = -r''s\,\text{cof.}\frac{s}{r} - \left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s + \text{ſin.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t - \text{cof.}\frac{s}{r}\,\Delta : t,$$

vnde cum duae adhuc inſint incognitae P et Q, alteram pro lubitu accipere licebit.

§. 19. Conſideremus etiam tenſionem T, quam filum in ſingulis punctis ſuſtinebit, quae cum in genere fuerit

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

ſubſtitutis valoribus modo inuentis fiet

$$T = -\text{cof.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - \text{ſin.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s - \frac{1}{g}\left(r\,r'' + r'\,r'\right) + \frac{1}{2g}\,r''s\,\text{ſin.}\frac{s}{r} + \frac{1}{2g}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g}\,\Gamma : t\,\text{cof.}\frac{s}{r} + \frac{1}{2g}\,\Delta : t\,\text{ſin.}\frac{s}{r}.$$

§. 20. Cum igitur ex priore aequatione ſit

$$\int Q\,\partial s = \text{tang.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s + \frac{1}{2g}\,r''s + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\frac{s}{\text{cof.}\frac{s}{r}} - \frac{1}{2g}\,\text{tang.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t + \frac{1}{2g}\,\Delta : t,$$

ſi hic valor in expreſſione tenſionis ſubſtituatur, prodibit

$$T =$$

$$T = -\frac{\int P\,\partial s}{\text{cof.}\frac{s}{r}} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s \text{ tang.}\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r') + \frac{1}{2g}\cdot\frac{r'r's\,s}{rr} + \frac{1}{2g\,\text{cof.}\frac{s}{r}}\Gamma : t$$

ficque per tenſionem formula $\int P\,\partial s$ ita exprimitur, vt ſit

$$\int P\,\partial s = -T\,\text{cof.}\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s\,\text{ſin.}\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r')\,\text{cof.}\frac{s}{r} + \frac{1}{2g}\,\text{cof.}\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g}\Gamma : t$$

vnde differentiando, ſi ponamus $\partial T = T'\,\partial s$ quandoquidem hic ſola quantitas s variabilis aſſumitur, fiet

$$P = -T'\text{cof.}\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\,\text{ſin.}\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{ſin.}\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{cof.}\frac{s}{r} + \frac{1}{gr}(rr'' + r'r')\,\text{ſin.}\frac{s}{r} - \frac{1}{2gr}\,\text{ſin.}\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\,\text{cof.}\frac{s}{r}$$

quae manifeſto reducitur ad hanc

$$P = -T'\,\text{cof.}\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\,\text{ſin.}\frac{s}{r} + \frac{r''}{2g}\,\text{ſin.}\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{cof.}\frac{s}{r} - \frac{1}{2gr}\,\text{ſin.}\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\,\text{cof.}\frac{s}{r}.$$

Simili modo, quia ex prima aequatione eſt

$$\int P\,\partial s = \cot.\frac{s}{r}\int Q\,\partial s - \frac{1}{2g\,\text{ſin.}\frac{s}{r}}\,r''s\cot.\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\frac{s}{\text{ſin.}\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g}\Gamma : t - \frac{1}{2g}\cot.\frac{s}{r}\,\Delta : t,$$

qui valor in expreſſione tenſionis ſubſtitutus praebet

$$T = -\frac{\int Q\,\partial s}{\text{ſin.}\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g\,\text{ſin.}\frac{s}{r}}\,r''s + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s\cot.\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r') + \frac{1}{2g}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g\,\text{ſin.}\frac{s}{r}}\,\Delta : t,$$

inde porro colligitur

$$\int Q\partial s = -T\,\text{sin.}\frac{s}{r} + \frac{r''s}{2g} + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{cos.}\frac{s}{r}$$
$$-\frac{1}{g}(rr'' + r'r')\,\text{sin.}\frac{s}{r} + \frac{\text{sin.}\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr}}{2g} + \frac{1}{2g}\Delta t$$

vnde tandem differentiando elicitur Q

$$Q = -T'\,\text{sin.}\frac{s}{r} - \frac{T}{r}\,\text{cos.}\frac{s}{r} + \frac{r''}{2g} + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{cos.}\frac{s}{r}$$
$$-\frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\text{sin.}\frac{s}{r} - \frac{1}{gr}(rr'' + r'r')\,\text{cos.}\frac{s}{r}$$
$$+\frac{1}{2gr}\,\text{cos.}\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{g}\frac{r'r's}{rr}\cdot\text{sin.}\frac{s}{r};\ \text{siue}$$
$$Q = -T'\,\text{sin.}\frac{s}{r} - \frac{T}{r}\,\text{cos.}\frac{s}{r} + \frac{r''}{2g} - \frac{rr''}{2gr}\,\text{cos.}\frac{s}{r}$$
$$-\frac{sr''}{2gr}\,\text{sin.}\frac{s}{r} + \frac{r'r'ss}{2gr^3}\,\text{cos.}\frac{s}{r}.$$

§. 22. Hoc igitur modo ambas litteras incognitas P et Q per tenſionem definiuimus, vbi notari meretur has litteras deſignare vires acceleratrices filo in puncto y applicatas. Quoniam enim elementi $Y y = \partial s$ maſſa quoque exprimitur per ∂s, vires motrices vtique erunt $P\partial s$ et $Q\partial s$, prouti ſupra aſſumſimus. Non ſolum autem ipſas has vires P et Q per tenſionem expreſſimus, ſed etiam formulas integrales $\int P\partial s$ et $\int Q\partial s$.

§. 23. Cum autem in formulis pro P et Q inuentis non ſolum tenſio ipſa T inſit ſed etiam eius differentiale $\partial T = T'\partial s$, operae pretium erit per combinationem harum formularum ſiue T ſiue T′ eliminare. Hoc modo reperiemus

$$P\,\text{sin.}\frac{s}{r} - Q\,\text{cos.}\frac{s}{r} = \frac{T}{r} - \frac{r''}{2g}\,\text{cos.}\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\frac{1}{gr}(rr'' + r'r') - \frac{r'r'ss}{2gr^3} = \frac{T}{r} - \frac{r''}{2g}\,\text{cos.}\frac{s}{r} + \frac{r''}{g} - \frac{r'r'ss}{2gr^3};$$
$$P\,\text{cos.}\frac{s}{r} + Q\,\text{sin.}\frac{s}{r} = -T' + \frac{r''}{2g}\,\text{sin.}\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\frac{r'r's}{grr} = -T' + \frac{r''}{2g}\,\text{sin.}\frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr};$$

vbi

vbi notaſſe iuuabit, exprimere formulam poſteriorem $P \text{ cof. } \frac{s}{r} + Q \text{ ſin. } \frac{s}{r}$ vim tangentialem qua filum in puncto Y ſollicitatur, alteram vero formulam $P \text{ ſin. } \frac{s}{r} - Q \text{ cof. } \frac{s}{r}$ vim normalem eidem puncto applicatam, quarum ergo vtraque ex tenſione T, quam quidem pro lubitu fingere licet, perfecte determinabitur. Atque hinc pro ipſo fili initio E vbi $s = 0$ fiet

$$P \text{ ſin. } \frac{s}{r} - Q \text{ cof. } \frac{s}{r} = \frac{T}{r} = -Q$$

ideoque $Q = -\frac{T}{r}$. Similique modo

$$P \text{ cof. } \frac{s}{r} + Q \text{ ſin. } \frac{s}{r} = -T' = P.$$

§. 24. His formulis euolutis ponamus vim tangentialem acceleratricem ſecundum directionem Y y agentem $= \Theta$, at vim normalem ſecundum directionem Y O verſus centrum circuli tendentem $= \Pi$, ita vt ſit

$$\Theta = P \text{ cof. } \frac{s}{r} + Q \text{ ſin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\Pi = Q \text{ cof. } \frac{s}{r} - P \text{ ſin. } \frac{s}{r}$$

atque valores harum duarum virium erunt

$$\Theta = -T' + \frac{r''}{2g} \text{ ſin. } \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr} \text{ et}$$

$$\Pi = -\frac{T}{r} + \frac{r''}{2g} \text{ cof. } \frac{s}{r} - \frac{r''}{2g} + \frac{r'r's\,s}{2gr^3}.$$

Nunc igitur cum quaeſtio in ſe ſit indeterminata, ſequentia Problemata ſpecialia percurramus, in quibus ratio virium ſollicitantium praeſcribitur, vt filo motus ſupra aſſignatus inducatur.

Problema I.

§. 25. *Definire vires tangentiales ad motum ſupra deſcriptum in filo producendum requiſitas.*

Solutio.

Cum igitur hic ſolae vires tangentiales requirantur, vires normales Π euaneſcent ita vt ſit $\Pi = 0$, vnde ex poſtre-

ma aequatione colligitur tenſio:

$$T = \frac{r''r}{2g}\,\text{cof.}\,\frac{s}{r} - \frac{rr''}{2g} + \frac{r'r'}{2grr}\,ss,$$

cuius differentiale ſumto ſolo s variabili praebet

$$T' = -\frac{r''}{2g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \frac{r'r's}{grr},$$

quo valore ſubſtituto reperimus vim tangentialem:

$$\Theta = \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \left(\frac{rr''-2r'r'}{2grr}\right)s + \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

quae ergo in ipſo termino E vbi $s = 0$ euadit $\Theta = 0$, in fine autem fili ſeu puncto T vbi $s = a$ erit

$$\Theta = \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{a}{r} - \frac{(rr''-2r'r')}{2grr}\,a.$$

Corollarium.

§. 26. Quia hic r denotat radium circuli ſecundum quem filum elapſo tempore t incuruatur, iam ſupra monuimus r talem eſſe debere functionem ipſius T, quae fiat infinita poſito $P = 0$: conſideremus vnicum caſum.

Exemplum.

§. 27. Sumamus $r = \frac{1}{t}$, erit $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$; hinc igitur fiet vis tangentialis quaeſita $\Theta = \frac{2}{gt^3}\,\text{ſin.}\,st$; tenſio autem erit $T = \frac{1}{gt^4}(1 - \text{cof.}\,st) + \frac{ss}{2gtt}$: hinc igitur ſequentia notari merentur: 1) In ipſo igitur initio vbi $t = 0$ vires tangentiales vbique infinitae requiruntur, vnde etiam tenſio euadet infinita. 2) Elapſo autem quouis tempore pro ſingulis fili punctis vires tangentiales erunt reciproce vt cubus temporis. 3) Pro ipſo autem fili termino E, vbi $s = 0$, tam vis tangentialis Θ quam tenſio euaneſcit, id quod natura rei poſtulat, cum punctum E maneat immotum. 4) Supra vidimus, celeritates puncti Y ſecundum directiones YP et YQ eſſe, priorem

rem $(\frac{\partial x}{\partial t}) = r' \text{ sin. } \frac{s}{r} - \frac{r's}{r} \text{ cos. } \frac{s}{r}$. Alteram vero

$$(\frac{\partial y}{\partial t}) = r' (1 - \text{cos. } \frac{s}{r}) - \frac{r'}{r} s \text{ sin. } \frac{s}{r},$$

quae ergo hoc casu euadent

$$(\frac{\partial y}{\partial t}) = \frac{-(1 - \text{cos. } st)}{tt} + \frac{1}{t} s \text{ sin. } st$$

$$(\frac{\partial x}{\partial t}) = -\frac{1}{tt} \text{ sin. } st + \frac{1}{t} s \text{ cos. } st,$$

quae casu $t = 0$, quo fit sin. $st = st$ et cos. $st = 1 - \frac{sstt}{2}$, erunt $(\frac{\partial x}{\partial t}) = -\frac{1}{2} s^3 t = 0$ et $(\frac{\partial y}{\partial t}) = \frac{1}{2} ss$, vnde patet, quo hic casus locum habere queat, initio singulis fili punctis Y in directione YQ eiusmodi celeritates imprimi debere, quae sint quadrato arcus EY $= s$ proportionales. Tum vero ipso initio viribus opus esse infinitis, quae deinceps in ratione triplicata temporis decrescent.

Problema II.

§. 28. *Definire vires normales* II, *ad motum supra descriptum in filo producendum requisitas.*

Solutio.

Hic igitur esse debet $\Theta = 0$, vnde colligimus:

$$T' = \frac{r''}{2g} \text{ sin. } \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

vnde deducimus integrando:

$$T = -\frac{rr''}{2g} \text{ cos. } \frac{s}{r} - \frac{r''ss}{4gr} + f : t,$$

quo valore substituto reperitur vis normalis quaesita

$$\Pi = -\frac{r''}{2g} (1 - 2 \text{ cos. } \frac{s}{r}) + (\frac{rr'' + 2r'r'}{4gr^3}) ss - \frac{1}{r} f : t,$$

vnde pro termino fili E fiet $\Pi = +\frac{r''}{2g} - \frac{1}{r} f : t$ et tensio $T = -\frac{rr''}{2g} + f : t$.

Exemplum.

§. 29. Consideremus hic iterum casum quo $r = \frac{t}{1}$, ideoque $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, eritque vis normalis:

$$\Pi = -\frac{1}{g t^3}(1 - 2\cos. s t) + \frac{1}{gt} s s - tf : t,$$

et tensio

$$T = -\frac{1}{gt^4}\cos. s t - \frac{ss}{2gtt} + f : t.$$

Hinc igitur pro termino fili E vbi $s = 0$ fiet

$$\Pi = +\frac{1}{gt^3} - t : f : t \text{ et } T = -\frac{1}{gt^4} + f : t,$$

motus autem filo in ipso initio imprimendus erit vt ante

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} s s.$$

Corollarium.

§. 30. Hoc igitur problema etiam nunc est indeterminatum, quoniam functio arbitrio nostro relinquitur. Eam igitur ita assumere licebit, vt tensio in ipso fili termino E euanescat, quod ergo fiet si functio $f : t = \frac{1}{gt^4}$, vnde fiet vis normalis :

$$\Pi = \frac{2}{gt^3}(1 - \cos. s t) + \frac{1}{gt} s s,$$

quae ergo in ipso puncto E euanescit. Hinc igitur patet quo maius euadat tempus t, has vires normales continuo fieri minores.

Problema III.

§. 31. *Inuenire tam vires tangentiales quam normales ad motum propositum fili requisitas, ita vt durante motu tensio fili in singulis punctis perpetuo sit nulla.*

Solutio.

Solutio.

Cum igitur ſit $T = 0$ ideoque etiam $T' = 0$, vires quaeſitae ſequenti modo exprimentur:

$$\Theta = \frac{r''}{2g} \text{ ſin. } \frac{s}{r} - \frac{r'' s}{2g r} \text{ et}$$

$$\Pi = -\frac{r''}{2g}(1 - \text{cof. } \frac{s}{r}) + \frac{h'' r''}{2g r^3} s s,$$

quae ambae euaneſcunt pro termino fili E vbi fit $s = 0$. Ex his duabus viribus etiam vires initio conſideratae P et Q aſſignari poterunt. Cum enim ſit

$$P = \Theta \text{ cof. } \frac{s}{r} - \Pi \text{ ſin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \Theta \text{ ſin. } \frac{s}{r} + \Pi \text{ cof. } \frac{s}{r},$$

hinc colligitur fore

$$P = \frac{r''}{2g} \text{ ſin. } \frac{s}{r} - \frac{r''}{2gr} s \text{ cof. } \frac{s}{r} - \frac{r' r'}{2g r^3} s s \text{ ſin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \frac{r''}{2g}(1 - \text{cof. } \frac{s}{r}) - \frac{r''}{2gr} s \text{ ſin. } \frac{s}{r} + \frac{r' r'}{2g r^3} s s \text{ cof. } \frac{s}{r}.$$

Exemplum.

§. 32. Sit iterum $r = \frac{1}{t}$, vt ſit $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, fietque $\Theta = \frac{1}{gt^3} \text{ ſin. } s t - \frac{s}{gtt}$ et

$$\Pi = -\frac{1}{gt^3}(1 - \text{cof. } s t) + \frac{s s}{2gt},$$

vel loco harum duarum virium applicatae concipi poſſunt ſequentes:

$$P = \frac{1}{gt^3} \text{ ſin. } s t - \frac{1}{gtt} s \text{ cof. } s t - \frac{1}{2gt} s s \text{ ſin. } s t.$$

$$Q = \frac{1}{gt^3}(1 - \text{cof. } s t) - \frac{1}{gtt} s \text{ ſin. } \frac{s}{r} + \frac{1}{2gt} s s \text{ cof. } \frac{s}{r},$$

ab his ſcilicet viribus filum, quod initio erat in directum extenſum, tandem poſt tempus infinitum quaſi in vnicum punctum conglomerabitur.

Scho-

Scholion.

§. 33. Hinc igitur infinitos casus deducere licet, quibus motus fili, dum a certis viribus continuo sollicitatur, perfecte determinari potest. Atque hi casus maxime sunt memorabiles, cum hactenus nullo plane casu talem motum inuestigare licuerit, ne eo quidem excepto, quo filo nullae plane vires applicatae concipiuntur. Simili autem modo infinitos alios huiusmodi casus euoluere licebit, quibus filum successiue secundum alios atque alios arcus circulares quacunque lege incurvatur; semper enim per theoriam generalem eiusmodi vires assignare licebit, quibus tales motus producentur.

ENODA-

ENODATIO DIFFICVLTATIS SVPER FIGVRA TERRAE A VI CENTRIFVGA ORIVNDA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 *Nouembr.* 1775.

§. 1.

Notum eſt, ſi Terrae figura ex ſola vi grauitatis cum vi centrifuga coniuncta definiatur, rationem Diametri aequatoris ad axem Terrae non maiorem reperiri quam 578 : 577, cum tamen haec ratio poſt menſuras diuerſorum graduum inſtitutas multo maior deprehendatur 201 : 200 propemodum. *Hugenius* quidem et *Newtonus*, qui primi hanc rationem inueſtigarunt, totam Terram tanquam ex materia vniformi compoſitam ſunt contemplati, interim tamen quaecunque diuerſa ſtructura in partibus Terrae interioribus ſtatuatur, eadem ſemper ratio diametri aequatoris ad axem reſultat, quamdiu ſcilicet grauitatis directio ad centrum Terrae tendens aſſumitur.

§. 2. Quod ſi enim intra Terram grauitatio poteſtati cuicunque diſtantiae a centro, quae ſit $= z$, proportionalis ſtatuatur, vt ea ſit $= z^{n-1}$, dum ſemi-axis Terrae per vnitatem exprimitur, ex Theoria aequilibrii fluidorum deducitur iſta aequatio: $\frac{z^n}{n} = C + \frac{x\,x}{2f}$, vbi ſi C A pro radio aequatoris et Tab. IV. Fig. 3.

$CB = 1$ pro semi-axe Terrae accipiatur, littera z denotat distantiam cuiusque particulae Z a centro terrae C, at x intervallum CX demisso ex Z ad CA perpendiculo CX, littera vero f denotat numerum 289 ex motu vertiginis Terrae ortum; tum vero littera C est quantitas constans ex ipso statu Terrae determinanda. Primo igitur punctum indefinitum Z capiatur in ipso polo B, fietque $x = 0$; at prodire debet $z = 1$, vnde colligitur constans $C = \frac{1}{n}$. Nunc punctum Z transferatur in aequatorem A, vt fiat $x = z$, atque habebitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{zz}{2f}$. Hinc autem, quia nouimus valorem ipsius z quam minime vnitatem esse superaturum, ponamus $z = 1 + \omega$, eritque satis exacte $z^n = 1 + n\omega$, et ob $2f = 578$ loco $\frac{zz}{2f}$ scribi sufficiet $\frac{1+2\omega}{578}$, hincque aequatio nostra praebebit $\frac{1+n\omega}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1+2\omega}{578}$, vnde colligitur $\omega = \frac{1}{577}$, ita vt hinc fiat radius aequatoris $C = 1 + \frac{1}{577}$, ideoque diameter aequatoris ad axem Terrae vt $577 : 576$, vnde patet hanc rationem ab exponente indefinito n prorsus non pendere.

§. 3. Ex his etiam manifestum est, quaecunque alia functio ipsius z pro grauitate accipiatur, perpetuo eandem conclusionem inde sequi debere. Quamobrem cum vera proportio inter axem Terrae et diametrum aequatoris tantopere ab ista inuenta ratione dissideat, necessario statui oportet, singulas Terrae particulas Z non solum ad centrum Terrae C vrgeri, sed insuper alias vires adesse debere, quibus particula in Z secundum directionem ZS ad CZ normalem sollicitetur; tales etiam vires hypothesis grauitatis vniuersalis qua singulae particulae ad omnes alias attrahi supponuntur reuera ostendit, ita vt in figura Terrae determinanda etiam istae vires laterales in computum duci debeant. Verum has ipsas vires ex theoria gra-

vita-

vitationis ne determinare quidem licet, nisi iam ante figura Terrae cum vniuersa eius structura fuerit cognita, quandoquidem harum virium determinatio non solum a densitate materiae per totam Terram dispositae sed etiam ab ipsa figura externa totius Terrae pendet; vnde satis intelligitur, hanc inuestigationem tam opere esse absconditam, vt eius perfecta explicatio nullo modo sperari possit. Quicquid enim a Geometris super hoc argumento in medium est allatum, meris hypothesibus iisque precario assumtis innititur, quae plerumque adeo omni probabilitate destituuntur.

§. 4. Quod si vero hanc inquisitionem generalissime suscipere velimus, binas illas vires, quibus singulae Terrae particulae Z secundum directiones ZC et ZS ob grauitatem vniuersalem sollicitantur, generaliter in computum introduci conueniet, vnde autem ob summam generalitatem vix quicquam concludere licebit; cum non constet, a quibusnam elementis istae vires pendere sint censendae; vis quidem prior ad centrum C vrgens probabili ratione functioni cuipiam ipsius distantiae $CZ = z$ proportionalis statui posse videtur, quam designemus littera Z, altera vero vis lateralis secundum ZS quae sit $= S$, manifesto non solum a distantia $CZ = z$ pendere potest, sed insuper angulum ACZ ita inuoluere debet, vt ea euanescat tam casu quo ille angulus euanescit, quam vbi fit rectus; quoniam ex rei natura euidens est, istam vim lateralem tam in aequatore CA quam in axe CB euanescere debere, siquidem nullum est dubium quin tam sub polis quam in aequatore omnia corpora directe versus centrum C sollicitentur, quamobrem vim illam alteram S tanquam functionem binarum variabilium $CZ = z$ et $CX = x$ spectari oportebit.

§. 4. His igitur praenotatis figuram Terrae secundum principia aequilibrii fluidorum, quemadmodum ea in Tom. XIII.

nouor. Commentar. expoſui inueſtigemus, ac primo quidem ſtatum preſſionis in puncto quocunque Z definiamus, quae altitudine p definiatur. Hunc in finem pro puncto Z vocemus binas coordinatas $CX = x$ et $XZ = CY = y$: hic enim tertia coordinata, quae ibi vocata erat $= z$, carere poſſumus, quandoquidem certum eſt, in omnibus ſectionibus per axem factis terram eandem figuram habere debere. Nunc igitur ambae vires Z et S ſecundum binas directiones ZX et ZY reſoluantur, ac prior quidem Z ſecundum ZC pro directionibus ZY et ZX, praebet vires $\frac{zx}{z}$ et $\frac{zy}{z}$. Altera vero vis $ZS = S$ pro iisdem directionibus dat has vires: $-\frac{sy}{z}$ et $+\frac{sx}{z}$. Praeterea vero vis centrifuga a motu diurno Terrae orta praebet vim ſecundum $YZ = \frac{x}{f}$, vnde ex ternis viribus quas in genere deſignaui per litteras P, Q, R, primo erit $R = 0$, ſecundo $P = \frac{x}{f} - \frac{zx}{z} + \frac{sy}{z}$ et tertio $Q = -\frac{zy}{z} - \frac{sx}{z}$. Ex his autem viribus, ſumta littera q pro denſitate in puncto Z, principia aequilibrii hanc dederunt aequationem: $\frac{\partial p}{q} = P\,\partial x + Q\,\partial y$, quae ergo noſtro caſu induet hanc formam,

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{zx\cdot\partial x}{z} + \frac{sy\cdot\partial x}{z} - \frac{zy\cdot\partial y}{z} - \frac{sx\cdot\partial y}{z},$$

ſiue

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{z}{z}(x\,\partial x + y\,\partial y) + \frac{s}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

Haec autem aequatio porro, ob $x\,\partial x + y\,\partial y = z\,\partial z$, contrahitur in hanc

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - Z\,\partial z + \frac{s}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

§. 6. Nunc autem ante omnia tenendum eſt, niſi haec formula integrationem admittat, ſtatum aequilibrii nullo modo locum inuenire poſſe; quamobrem, cum tuto aſſumere queamus, in Terra dari ſtatum aequilibrii, quia alioquin quaeſtio de

de figura ne ſuſcipi quidem poſſet, neceſſe eſt vt formula haec inuenta integrationem admittat, quod quidem in primo termino $\frac{x\partial x}{f}$ ſponte euenit; tum vero etiam integratio in ſecundo termino ſemper ſuccedit, dummodo Z fuerit functio ipſius z vti aſſumſimus; quamobrem ſupereſt vt poſtremum membrum $\frac{s}{z}(x\partial x - x\partial y)$ integrationem admittat, quod cum hoc modo repraeſentari poſſit $\frac{s\,x\,y}{z}\left(\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y}\right)$, integratio locum habere nequit, niſi $\frac{s\,x\,y}{z}$ ſit functio ipſius $\frac{x}{y}$, ideoque functio nullius dimenſionis ipſarum x et y; quare cum $z = \sqrt{(x\,x + y\,y)}$ vnam habeat dimenſionem, neceſſe eſt vt S ſit functio homogenea ipſarum x et y, cuius dimenſionum numerus ſit -1, vnde iam ſatis clare cognoſcimus indolem functionis S, ſiquidem pro certo aſſumamus, figuram terrae aequilibrio eſſe praeditam.

§. 7. Quo hoc clarius appareat, loco coordinatarum x et y in poſtremo membro introducamus angulum $ACZ = \Phi$, eritque $x = z\cos.\Phi$ et $y = z\sin.\Phi$, vnde fit $y\partial x - x\partial y = -zz\partial\Phi$, ita vt iam noſtra aequatio hanc induat formam:

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\partial x}{f} - Z\partial z - S z\partial\Phi,$$

quae manifeſto integrationem non admittit, niſi fuerit Sz functio anguli Φ. Sit igitur Φ iſta functio, eritque vis lateralis $S = \frac{\Phi}{z}$; vbi patet, iſtam functionem Φ ita debere eſſe comparatam, vt euaneſcat tam poſito $\Phi = 0$, quam $\Phi = 90°$. Hinc igitur integrando adipiſcemur

$$\int\frac{\partial p}{q} = C + \frac{x\,x}{2f} - \int Z\partial z - \int\Phi\partial\Phi.$$

Atque hic porro obſeruandum eſt aequilibrium ſubſiſtere non poſſe, niſi etiam formula $\int\frac{\partial p}{q}$ ſit integrabilis. Quoniam autem hic denſitatem aquae q vbique conſtantem aſſumere licet, erit

vtique

$$\frac{p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z\,\partial z - \int \Phi\,\partial\Phi.$$

Si enim ob diuerſos caloris gradus denſitas q eſſet variabilis, iam ſatis euictum eſt, aequilibrium locum habere non poſſe, niſi q ſit functio ipſius p tantum, hoc eſt niſi per ſingula ſtrata vbi eadem eſt preſſio p etiam denſitas ſit eadem.

§. 8. His de aequilibrio per totam fluidi maſſam praemiſſis, nil aliud ſupereſt niſi vt aequatio inuenta ad ſupremam aquae ſuperficiem accommodetur, vbi cum preſſio p ſit euaneſcens, poſito $p = 0$ aequatio haec

$$0 = C + \frac{xx}{2f} - \int Z\,\partial z - \int \Phi\,\partial\Phi,$$

exprimet figuram quam ſuprema aquae ſuperficies in ſtatu aequilibrii accipiet. Ex iam allatis autem patet, parum referre, cuiusmodi functio ipſius z pro Z aſſumatur, quoniam diſcrimen inter diametrum aequatoris et axem Terrae nimis eſt parvum, quam vt ex natura functionis Z ſenſibilis diuerſitas oriri poſſit.

§. 9. Deſignemus igitur vti incepimus vnitate ſemiaxem Terrae CB, ſitque ſub ipſo polo in B vis grauitatis accelerarix etiam vnitate expreſſa, ita vt poſito $z = 1$, fieri quoque debeat $Z = 1$; quamobrem ſtatuamus aliquanto generalius $Z = z^{n-1}$, vt fiat $\int Z\,\partial z = \frac{z^n}{n}$. Deinde quia functio Φ euaneſcere debet caſibus $\Phi = 0$ et $\Phi = 90°$, pro Φ capiamus functionem ſimpliciſſimam huic conditioni ſatisfacientem, ponendo $\Phi = \alpha \sin.\Phi \cos.\Phi$, vnde fit $\int \Phi\,\partial\Phi = \frac{1}{2}\alpha \sin.\Phi^2$. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio pro ſuperficie aquae erit $0 = C + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2}\alpha \sin.\Phi^2$, quae ergo ſimul exprimit

mit figuram Terrae, quam ob vim centrifugam recipere debet, vbi vt ante eſt $f = 289$.

§. 10. Ante omnia hic conſtantem C definire oportet, id quod commodiſſime fiet transferendo punctum Z in ipſum B, vbi fieri neceſſe eſt $z = 1$, $x = 0$ et $\Phi = 90^\circ$, vnde colligitur conſtans $C = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha$. Sicque aequatio pro figura Terrae erit

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2}\alpha \text{ ſin. } \Phi^2, \text{ ſiue}$$

$$0 = \frac{1 - z^n}{n} + \frac{xx}{2f} + \frac{1}{2}\alpha \text{ coſ. } \Phi^2,$$

ſeu quia coſ. $\Phi = \frac{x}{z}$, erit

$$z^n = 1 + \frac{nxx}{2f} + \frac{\alpha nxx}{2zz},$$

vnde ob $z = \sqrt{(xx + yy)}$ facile deducitur aequatio inter binas coordinatas x et y.

§. 10. Hinc igitur quaeramus ſemi-diametrum aequatoris transferendo punctum Z in A, vbi ergo fiet $x = z = CA$, cuius propterea valor ex hac aequatione elici debet

$$z^n = 1 + \frac{nzz}{2f} + \frac{1}{2}\alpha n.$$

Quia vero nouimus, valorem ipſius z parum ab vnitate diſcrepare, ponamus $z = 1 + \omega$, vt fiat $z^n = 1 + n\omega$ et $zz = 1 + 2\omega$, quibus valoribus inductis fiet $\omega = \frac{1 + \alpha f}{2(f - 1)}$. Sin autem hunc valorem accuratius deſideremus, loco z^n ſcribamus

$$1 + n\omega + \frac{1}{2}n(n - 1)\omega\omega$$

et $1 + 2\omega + \omega\omega$ loco zz, et noſtra aequatio fiet

$$\omega + \frac{1}{2}(n - 1)\omega\omega = \frac{1 + 2\omega + \omega\omega}{2f} + \frac{1}{2}\alpha,$$

vbi cum ſit

(2

$$(2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega)\omega = 1+\alpha f,$$

inde fit $\omega = \frac{1+\alpha f}{2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega}$, vbi ſi loco f ſcribatur 289, fiet $\omega = \frac{1+289\alpha}{576+(289n-290)\omega}$, in quo denominatore loco ω ſufficit ſcripſiſſe valorem vero proximum, qui eſt $\frac{1+289\alpha}{576}$, vnde obtinebitur valor correctus $\frac{(1+289\alpha)576}{576^2+(289n-290)(1+289\alpha)}$.

§. 11. Quoniam igitur ex menſuris variorum graduum meridiani ratio diametri aequatoris ad axem Terrae concluſa eſt vt 201 ad 200, erit pro prima approximatione $\omega = \frac{1}{200}$, atque hinc valor coefficientis α definiri poterit, cum eſſe debeat $\frac{1}{200} = \frac{1+289\alpha}{576}$, vnde igitur fiet $\alpha = \frac{376}{200\cdot 289} = \frac{47}{25\cdot 289} = \frac{1}{154}$, proxime. Superfluum autem foret determinationem magis exactam deſiderare, cum ratio aſſumta 201 : 200 ſatis notabiliter a veritate recedere poſſit; quamobrem hinc plus concludere non licet, quam eſſe propemodum $\alpha = \frac{1}{155}$, vnde ſimul patet, exponentem n prorſus non in computum ingredi.

§. 12. Hinc igitur diſcimus, vt ſuperficies oceani in ſtatu quo Terra actu reperitur in aequilibrio ſubſiſtere poſſit, neceſſario requiri, vt in viſceribus Terrae ſingulae particulae non ſolum ad centrum Terrae in directione ZC ſollicitentur, ſed praeterea accedat vis lateralis ſecundum directionem ad ZC normalem agens, cuius quantitas propemodum erit $\frac{\Phi}{z} = \frac{\sin.\Phi\cos.\Phi}{150z}$, dum ſcilicet grauitas ſub ipſo Polo vnitate exprimitur. Ita igitur vis lateralis maxima euadet vbi angulus $ACZ = \Phi$ fit ſemirectus, quippe cui reſpondebit vis lateralis $= \frac{1}{300z}$, quae ergo in ſuperficie maris vbi fit proxime $z = 1$ euadit $\frac{1}{300}$, ideoque vi centrifugae fere aequalis.

§. 13.

§. 13. Nisi igitur istae vires laterales ita fuerint comparatae, maria in superficie Terrae in aequilibrio subsistere nequeunt, sed in perpetua agitatione versarentur, id quod imprimis intelligendum est, si totus Terrae globus ex materia fluida constaret; tum enim, etiamsi suprema superficies talem figuram accepisset, vt vires totales, quibus singula puncta ibi sollicitantur, essent ad ipsam superficiem normales, tamen quia in maioribus profunditatibus aqua non foret in quiete, mox ille situs perturbaretur, neque igitur tota Terra ad certam figuram se componere posset.

§. 14. Manifestum autem est, talem legem circa vires laterales in ipsa natura locum habere nullo modo posse, quandoquidem pro minimis a centro Terrae distantiis hae vires laterales in infinitum excrescerent, cuiusmodi effectus ab attractione mutua neutiquam oriri potest; vnde pro certo affirmare possumus: Si tota Terra esset fluida, eius superficiem nunquam ad vllum statum aequilibrii peruenire posse.

§. 15. Cum autem maxime verisimile sit, maria nusquam tantam profunditatem occupare, vt discrimen nostrae formulae pro S inuentae a vera lege attractionis, quaecunque ea fuerit, vnquam sentiri queat, ideoque perinde, vtrum vires laterales nostram legem sequantur an vero quamcunque aliam, vtique fieri poterit, vt vniuersus oceanus in aequilibrio subsistat, siquidem hic ab exiguis agitationibus, quae a plurimis causis oriri possunt, mentem abstrahamus, cuiusmodi sunt venti, imprimis autem varietas caloris. Cum enim sub aequatore calor perpetuo multo maior sit quam versus polos, quoniam ibi densitas aquae aliquanto minor euadit, aequilibrium etiam ob hanc causam locum habere nequit, sed per ea,

quae in Theoria motus fluidorum demonſtraui, aqua ſuprema perpetuo fluxu ab aequatore verſus polos deferri debet, quae autem iactura ab aqua prope fundum a polis ad aequatorem affluente iterum reſarcietur. Talis igitur motus oceano aeque eſt naturalis atque ille, quo perpetuo ab oriente occidentem verſus profertur.

SUR

SUR LE MOUVEMENT GYRATOIRE D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

PAR

JACQUES BERNOULLI.

Présenté à la Conférence le 8 Janv. 1787.

Second Mémoire.

Dans le premier Mémoire sur cette matière j'ai traité & développé, à ce qu'il me paroit avec toute l'étendue & la clarté nécessaires, le cas le plus simple, qu'on puisse se proposer dans ces recherches. Je passe maintenant à un second cas, qui ne différera du premier que dans la supposition, que le mouvement, au lieu de se faire sur une table horizontale, se fasse dans un plan vertical, ensorte que l'action de la gravité devienne un élément de plus à considérer dans le calcul.

§. 1. Soit donc encore le cercle B P décrit avec la longueur naturelle du fil, & C M la courbe décrite par le corps. En supposant que A B soit un rayon vertical, nommons de nouveau

A B - - - - - - a,
l'angle B A P - - - - - ω,

le double de l'eſpace, que décrit un corps en tombant librement pendant une ſeconde - - - - - g,
la plus grande extenſion poſſible du fil - - - θ,
le poids requis pour la produire - - - - - - P,
la maſſe du corps en mouvement - - - - - M,
la viteſſe du corps en M, exprimée par le nombre de pieds, qu'il peut parcourir avec cette viteſſe dans une ſeconde - - - - - - - - u,
l'élément du tems exprimé en ſecondes - - - ∂t,
le rayon oſculateur en M - - - - - - - - R.

Le poids M étant réſolu en deux forces, l'une ſelon AP, & l'autre perpendiculaire à celle-ci, la premiére ſera $=$ M cof. ω, & l'autre $=$ M ſin. ω.

§. 2. Nous aurons donc d'abord cette équation

$$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\theta} - g \text{ cof. } \omega = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2},$$

ou, puiſque $u = \frac{a\,\partial\omega}{\partial t}$,

$$\frac{a\,a\,\partial\omega^2}{R\,\partial t^2} - \frac{gPz}{M\theta} - g \text{ cof. } \omega = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}.$$

Or $R = \frac{a\,a\,\partial\omega^3}{a\,\partial\omega^3 + \partial z\,\partial\partial\omega - \partial\omega\,\partial\partial z}$, où $\partial\partial\omega$ n'eſt pas cenſée être $= 0$, puiſque nous avons pris ∂t pour conſtant, & que la viteſſe gyratoire n'eſt plus conſtante comme dans le premier cas. Subſtituant donc la valeur de R, l'équation devient

$$\frac{a\,\partial\omega^3 + \partial z\,\partial\partial\omega - \partial\omega\,\partial\partial z}{\partial t^2\,\partial\omega} - \frac{gPz}{M\theta} - g \text{ cof. } \omega = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}.$$

§. 3. Mais on voit que uu doit être $= -2gz$ cof. ω $+$ une quantité conſtante, qui dépendra de la viteſſe initiale au point B. Faiſons donc $uu = 2C - 2g\,a$ cof. ω, ce qui donnera $\partial t = \frac{a\,a\,\partial\omega^2}{uu} = \frac{a\,a\,\partial\omega^2}{2C - 2g\,a\,cof.\,\omega}$. Subſtituant cette valeur dans l'équation du §^{e} précédent, & otant les fractions, nous aurons

2C

$$2C\,a\,\partial\omega^3 - 3g\,a\,a\,\text{cof.}\,\omega\,\partial\omega^3 + 2C\,\partial z\,\partial\partial\omega - 2g\,a\,\text{cof.}\,\omega\,\partial z\,\partial\partial\omega - 4C\,\partial\omega\,\partial\partial z + 4g\,a\,\text{cof.}\,\omega\,\partial\omega\,\partial\partial z - \frac{g\,p\,a\,a\,z\,\partial\omega^3}{\kappa\,\beta} = 0.$$

§. 4. Comme on voit d'abord que l'intégration de cette équation eſt ſujette à de très grandes difficultés, ſi non abſolument impoſſible; j'ai imaginé un autre moyen tout auſſi ſur, quoiqu'indirect, pour parvenir au même but, ſavoir à l'équation cherché de la courbe décrite par le corps. Il ne s'agira que de me ſuivre avec quelque attention dans mon raiſonnement.

§. 5. Dans le premier cas, que nous avons traité, nous avons vu, que la courbe étoit compoſée d'une infinité de *parties* toutes égales entre elles, ſavoir la même epicycloïde toûjours renouvellée: que chacune de ces parties ou de ces epicycloïdes étoit infiniment-petite, & que les ordonnées z ſont dans un rapport infinement petit avec les arcs correſpondans $a\,\omega$, que nous avons regardés comme les abſciſſes. Or à n'enviſager que ſuperficiellement le cas, que nous traitons à préſent, on voit d'abord, que pluſieurs de ces propriétés doivent concourir encore dans la courbe quelconque, que nous cherchons. En effet le fil s'étendant & ſe reſſerrant alternativement ſans ceſſe, il doit y avoir encore une infinité de plus-petites ordonnées; ſeulement, comme la viteſſe & l'effet de la gravité varient continuellement, les *parties* de la courbe, compriſes entre chaque paire voiſine des plus grandes ou des plus petites ordonnées, ne pourront pas être égales entre elles, comme dans le précédent cas.

§. 6. D'un autre coté, comme la viteſſe ſelon la direction du fil doit toûjours, par les raiſons indiquées dans le

prémier Mémoire, être infiniment plus petite que la viteſſe gyratoire, il faudra encore ici, que z et ∂z ſoyent dans un rapport infiniment-petit avec $a\omega$ et $a\partial\omega$.

§. 7. Mais une remarque, à laquelle on doit ſurtout faire attention, parceque c'eſt ſur elle, que repoſera principalement tout notre raiſonnement ſuivant, c'eſt, que chaque augmentation de l'arc $a\omega$, qui ſert de baſe à une *partie* de courbe, compriſe entre une paire voiſine des plus grandes ou plus petites ordonnées, ſera, comme dans notre premier cas, toûjours auſſi infiniment-petite. Car, comme ce ſont des forces finies, qui agiſſent ſur le corps dans la direction du fil, & que ce corps ne parvient pourtant jamais qu'à décrire des eſpaces z infiniment-petits, il eſt conſtant par les loix de la méchanique, qu'il ne peut non plus employer à ces allées & venues, que des tempuſcules infiniment-petits: & dans chacun de ces tempuſcules le corps ne pourra décrire non plus avec ſa viteſſe gyratoire finie, qu'un angle ou un arc infiniment-petit.

§. 8. Ceci étant donc démontré, que ce que nous déſignons particuliérement par le nom de *partie de courbe*, n'embraſſe qu'un angle-au-centre infiniment petit, il n'y a pas la moindre difficulté, qu'on ne puiſſe pour tout le mouvement, qui ſe fait par une de ces *parties*, regarder comme conſtantes la viteſſe gyratoire du corps, & l'action de la gravité pour augmenter ou diminuer la tenſion du fil; puisque c'eſt encore un principe généralement reconnu dans la méchanique, que, quelque variables que puiſſent être la viteſſe d'un corps & la force qui agit ſur lui, on les peut néanmoins regarder comme conſtantes, pendant un tems ∂t ou un eſpace ∂x infiniment-petits.

§. 9.

§. 9. D'après ceci recommençons nos calculs, en ſuppoſant u conſtante, & en mettant pour l'action de la gravité dans la direction du fil, que nous avons vu être $= g \cos. \omega$, une autre conſtante h. Ces ſuppoſitions, comme nous venons de voir, ne peuvent avoir lieu que pour une ſeule *partie* de la courbe; & nous verrons enſuite, comment il faudra s'y prendre, pour embraſſer dans l'équation tout le nombre infini de ſes diverſes *parties*.

§. 10. Nous aurons donc à-préſent cette équation:
$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\vartheta} - h = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{uu\,\partial\partial z}{aa\,\partial\omega^2}$.
Subſtituons de nouveau pour R ſa valeur, en remarquant, qu'auſſi long-tems que u eſt regardée comme conſtante, $a\,\partial\omega$ eſt auſſi proportionelle à ∂t, & par conſéquent $\partial\partial\omega = 0$, donc $R = \frac{a\,a\,\partial\omega^3}{a\,a\,\omega^2 - d\,d\,z}$, ce qui donne
$\frac{a\,a\,uu\,d\omega^2 - uu\,\partial\partial z}{a\,a\,d\omega^2} - \frac{gPz}{M\vartheta} - h = \frac{uu\,\partial\partial z}{aa\,\partial\omega^2}$, ou
$auu\,\partial\omega^2\,\partial z - 2uu\,dz\,\partial\partial z - \frac{gPaazz\,\partial z\,\partial\omega^2}{M\vartheta} - aah\,\partial z\,\partial\omega^2 = 0$.
Intégrant & ajoutant la conſtante $D\,\partial\omega^2$, on trouve
$(auu - aah)\,z\,\partial\omega^2 - uu\,\partial z^2 - \frac{gPaazz\,\partial\omega^2}{2M\vartheta} + D\,\partial\omega^2 = 0$,
d'où l'on tire
$$\partial\omega = \sqrt{\frac{2M\vartheta uu}{gPaa}} \times \frac{\partial z}{\sqrt{\frac{2M\vartheta}{gPa}(uu - ah)z + \frac{2MD\vartheta}{gPaa} - zz}}.$$
Faiſons
$z = \frac{M\vartheta}{gPa}(uu - ah) - y$, et $\sqrt{\frac{2M\vartheta uu}{gPaa}} = \lambda$,
ſubſtituons ces valeurs, et mettons enſuite de nouveau
$\frac{M^2\vartheta^2}{g^2P^2a^2}(uu - ah)^2 + \frac{2MD\vartheta}{gPaa} = bb$,
l'équation ſe changera en celle-ci $\partial\omega = \frac{-\lambda\,\partial y}{\sqrt{(bb - yy)}}$. Intégrant donc de nouveau, on aura

$\omega =$

$$\omega = \lambda\,(E - A\,.\,\text{fin.}\,\tfrac{y}{b}),\ \text{ou}\ y = b\,\text{fin.}\,(E - \tfrac{\omega}{\lambda}).$$

Parlà on voit, que chaque *partie de courbe* eſt encore une epicycloïde *infiniment*-allongée, dont la baſe (λ étant infiniment-petit) n'eſt qu'un arc infiniment-petit, tel que je l'avois prévu d'avance, comme un point néceſſaire pour la validité de notre calcul.

§. 12. Commençons par remettre pour y, λ, et b leurs valeurs, ce qui donnera

$$\omega = \sqrt{\tfrac{2M\theta uu}{gPaa}} \times (E - A\,.\,\text{fin.}\,\tfrac{M\theta(uu-ab)-gPaz}{M^2\theta^2(uu-ab)+2gPMD\theta}),\ \text{et}$$
$$z = \tfrac{M\theta}{gPa}(uu-ab) - \sqrt{\tfrac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(uu-ab)^2 + \tfrac{2MD\theta}{gPaa}}$$
$$\times\,\text{fin.}\,(E - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{gP}{2M\theta}}).$$

§. 12. Comme on aura donc

$$\partial z = \sqrt{\tfrac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(uu-ab)^2 + \tfrac{2MD\theta}{gPaa}} \times \tfrac{a\,\partial\omega}{u}\sqrt{\tfrac{gP}{2M\theta}}$$
$$\times\,\text{cof.}\,(E - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{gP}{2M\theta}}),$$

la viteſſe ſelon la direction du fil, que dans le précédent Mémoire j'ai nommée v, & qui eſt $= \frac{u\,\partial z}{a\,\partial\omega}$, deviendra

$$= \sqrt{\tfrac{M\theta}{2gP}\left(\tfrac{uu-ab}{a}\right)^2 + \tfrac{D}{aa}} \times \text{cof.}\,(E - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{gP}{2M\theta}}).$$

§. 13. Pour paſſer maintenant d'une *partie* de la courbe à la courbe entiére, & pour trouver l'équation, qui embraſſe à la fois toutes ces parties, il n'y a qu'à ſubſtituer pour u & b, que nous avons priſes conſtantes jusqu'à-préſent, les valeurs variables, que nous leur avions trouvées plus haut, ſavoir pour u, $\sqrt{(2C - 2ga\,\text{cof.}\,\omega)}$ d'après le §. 3, & pour b, $g\,\text{cof.}\,\omega$; ce qui donnera pour équation de la courbe complète

$z =$

$$z = \frac{M\theta}{gPa}(2C - 3gacof.\omega) - \sqrt{\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(2C - 3gacof.\omega)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa}} \times$$
$$fin.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta acof.\omega}}\right).$$

§. 14. En faiſant les mêmes ſubſtitutions, on trouvera la valeur générale de

$$v = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2C - 3gacof.\omega}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times cof.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta acof.\omega}}\right).$$

§. 15. L'équation que nous avons trouvée pour la courbe, eſt, comme on voit, ſi compliquée, que ſi nous y étions parvenus directement avec le ſeul ſecours du calcul, il nous ſeroit impoſſible de nous faire une idée de la nature & des propriétés de la courbe; au lieu que la manière indirecte, qui nous a conduit à cette équation, renferme le grand avantage, qu'elle nous a fait entrer dans ſon eſſence, & fait voir, ſans laiſſer le moindre doute, que la courbe eſt compoſée d'une infinité d'épicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, à moins qu'après un ou pluſieurs tours le corps ne vienne juſtement à décrire de nouveau les mêmes epicycloïdes, qu'il avoit décrites auparavant; ce qui arrivera, ſi $\frac{gP}{4M - \theta - 4gM\theta a}$ eſt un quarré.

§. 16. Notre équation renferme trois conſtantes à déterminer, ce qui ſe fera par la conſidération de l'état initial du corps, quand $\omega = o$. Suppoſons qu'alors ſa viteſſe gyratoire ſoit due à la hauteur f, &, pour plus de ſimplicité, que la viteſſe ſelon la direction du fil $= o$, & z auſſi $= o$. Nous aurons donc, 1°. $u = \sqrt{(2C - 2gacof.\omega)} = \sqrt{(2C - 2ga)} = \sqrt{2gf}$, ce qui donne $C = g(a + f)$. 2°. En mettant pour C la valeur qu'on vient de trouver,

$$v = o = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf - ga}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times cof.E,$$

où l'on peut encore rester en doute, si c'est cos. E, ou l'autre facteur, qui doit être mis $= 0$. Prenons donc l'équation

$$z = 0 = \frac{M\theta}{gPc}(2gf - ga) - \sqrt{\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2c^2}(2gf - ga)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa}} \times \text{sin. E.}$$

A-présent l'on voit qu'on peut mettre $E = (4m + 1)\,90°$, (entendant par m un nombre entier quelconque), & satisfaire parlà à toutes les deux équations. En effet on aura pour la derniere sin. $E = 1$, & $D = 0$; & comme cos. $E = 0$,

$$\sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf - ga}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \text{cos. E}$$ sera aussi $= 0$.

Substituant donc dans les équations trouvées pour z & v, les valeurs trouvées pour C, D & E, elles se changeront en celles-ci

$$z = \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cos.}\,\omega) - \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cos.}\,\omega) \times \text{cos.}\, a\omega \sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}},$$

$$v = \sqrt{\frac{gM\theta}{2P}}\left(\frac{2f + 2a - 3a\,\text{cos.}\,\omega}{a}\right)^2 \times \text{sin.}\, a\omega \sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}}.$$

§. 17. Tachons d'entrer encore d'avantage dans la nature de notre courbe, & cherchons prémiérement les plus grandes & les plus petites ordonnées. Comme pour cet effet il faut faire $\partial z = 0$, & que v est proportionnelle à ∂z, il n'y a qu'à mettre l'expression, que nous venons de trouver pour v, $= 0$. Or, comme ces plus grandes & plus petites ordonnées sont infiniment proches l'une de l'autre, & reviennent, pour peu que l'angle ω reçoive d'accroissement, on voit que ce n'est pas le premier facteur

$$\sqrt{\frac{gM\theta}{2P}}\left(\frac{2f + 2a - 3a\,\text{cos.}\,\omega}{a}\right)^2,$$

qui doit être mis $= 0$, mais le second

$$\text{sin.}\, a\omega \sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}}.$$

Ce

Ce ſecond facteur étant donc $= 0$, on aura (en entendant encore par m un nombre entier quelconque),

$$a\omega\sqrt{\frac{P}{4mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,cof.\omega}} = 2m\,90^\circ, \text{ ou}$$

$$\omega = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,cof.\omega}{P}}.$$

Mettant cette valeur de ω dans l'expreſſion générale de z, on aura, puiſque $cof.\,m\,180^\circ = \pm 1$,

$$z = \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,cof.\omega) \mp \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,cof.\omega),$$

ou bien $z = 0$, & $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,cof.\omega)$.

Les plus petites ordonnées ſeront donc toutes $= 0$, & les plus grandes varieront ſuivant la *partie* de courbe, ou l'epicycloïde, à laquelle elles appartiendront, c'eſt-à-dire ſuivant l'angle ω plus ou moins grand. Ainſi par exemple au commencement, ou au plus haut point du mouvement, quand $\omega = 0$, la plus grande ordonnée ſera la plus petite de toutes les plus grandes, ſavoir $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a)$. Quand $\omega = 90^\circ$ ou 270°, la plus grande ordonnée devient $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a)$, & quand $\omega = 180^\circ$, la plus grande ordonnée devient la plus grande de toutes les plus grandes, ſavoir $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 5a)$.

§. 18. Ici l'on pourroit faire une objection aſſés ſpécieuſe, ſavoir que z ayant été ſuppoſée $= 0$, quand $\omega = 0$, elle ne peut pas en même tems être $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + a)$, & que de même il n'eſt point démontré, qu'aux arcs de 90, 180, ou 270 dégrés répondra préciſement chaque fois une plus grande ordonnée de la courbe. Pour réſoudre cette difficulté il faut faire attention, que ces plus grandes ordonnées ſont, comme je l'ai déja fait obſerver, toutes infiniment voiſines les unes des autres, & que par-conſéquent ſi une plus grande ordonnée ne re-

répond pas au point précis d'un certain nombre de dégrés, comme de 0, 90 &c., elle s'en trouvera à la distance d'un si petit angle, qu'il ne changera en rien la valeur de l'ordonnée, & que ce petit angle pourra être négligé. Cet angle cependant, que nous nommerons β, sera chaque fois déterminé de la manière suivante. Nous avons vu, que la plus grande ordonnée z devient $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a)$, quand $\omega = 90°$; mais comme ceci n'est vrai que très à-peu-près, supposons que ω soit alors $= 90° + \beta$, par-conséquent sin. $\omega = 1$, & cos. $\omega = \beta$; nous aurons, en substituant ces valeurs de z & de ω dans l'équation à la fin du §. 16,

$$\frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a) = \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a) - \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a) \times \cos. a\,(90° + \beta)\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta}} \text{ ou}$$

$$\cos. a\,(90° + \beta)\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta}} = -1,$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4Mf\theta + 4Ma\theta)}{P}} - 90°,$$

(où m signifie un nombre impair.) Comme β ne peut être qu'infiniment-petit, & que θ l'est aussi, il faut que m soit infiniment grand; β n'est donc pas déterminé, & il ne peut pas l'être, en conservant toute la rigueur de nos suppositions, parcequ'il y aura plusieurs plus grandes ordonnées aux environs de $\omega = 90°$, qui seront toutes $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a)$, & à chacune desquelles répondra un autre angle β. Mais si au lieu de regarder θ comme rigoureusement infiniment petit, on lui donne une valeur finie quoique très petite par rapport à a, m devra aussi être un nombre impair fini, & il faudra choisir celui, qui donnera pour

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4mf\theta + 4Ma\theta)}{P}} - 90°$$

la plus petite valeur. Le même raisonnement aura lieu, quand

$z =$

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 5a), \text{ \& } \omega = 180^\circ + \beta;$$

car alors on trouve

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta + 8Ma\theta}{P}} - 180^\circ.$$

Mais quand

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a), \text{ et } \omega = 0 + \beta, \text{ on a}$$

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta}{P}},$$

où, n'y ayant rien à ſouſtraire, m devra être mis $= 1$, que θ ſoit infiniment petit ou ſeulement très petit.

§. 19. Cherchons encore l'angle ou l'arc, qui doit ſervir de baſe à chaque epicycloïde. Pour cet effet il n'y a qu'à voir, quelle eſt la diſtance entre deux plus petites ordonnées voiſines. Comme nous avons trouvé, que $a\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta(f + a - a\cos.\omega)}}$ doit être $= 2m\,90^\circ$, pour que z devienne une plus grande ou plus petite ordonnée; on aura les plus grandes ordonnées, quand m eſt un nombre impair, par ce qu'alors cos. $2m\,90^\circ$ devient négatif; & les plus petites ordonnées, par la raiſon contraire, reviendront, quand m ſera un nombre pair. Si donc à telle plus petite ordonnée que ce ſoit, répond un certain angle ω, & un certain nombre m, il eſt clair, que pour la plus petite ordonnée voiſine le nombre m deviendra $m + 2$, & l'angle ω prendra un petit accroiſſement Φ, deſorte qu'on aura encore

$$a(\omega + \Phi)\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 2(m + 2)\,90^\circ;$$

ſouſtrayant l'autre équation de celle-ci, il reſtera

$$a\Phi\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 360^\circ, \text{ ou bien}$$

$$\Phi = 360^\circ\sqrt{\frac{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}{Paa}}.$$

Cet angle Φ ou l'arc $a\Phi$ eſt la baſe, que nous cherchions, &

comme nous voyons, que cos. ω revient encore dans son expression, c'est une marque, que les bases varieront suivant les différentes epicycloïdes, auxquelles elles appartiendront. Ainsi au point le plus haut, quand $\omega = 0$, l'angle Φ sera $= 360° \sqrt{\frac{4 M f \vartheta}{P a a}}$; quand $\omega = 90°$ ou $270°$, on aura $\Phi = 360° \sqrt{\frac{2 M \vartheta (f+a)}{P a a}}$; & quand $\omega = 180°$, l'angle de base sera le plus grand de tous, savoir $= 360° \sqrt{\frac{4 M \vartheta (f+2a)}{P a a}}$, comme alors on a aussi de même la plus grande de toutes les plus grandes ordonnées.

§. 20. Il vaut la peine que nous nous arrêtions un moment à un cas particulier, savoir celui, quand la hauteur f, due à la viteſſe gyratoire initiale du corps est $= \frac{1}{2} a$. Alors on a $v v = g a$. Or on sait que, lorsque la viteſſe d'un corps, qui tourne autour d'un centre, est égale à celle qu'il pourroit acquérir, en parcourant avec sa force centripète la moitié du rayon, les forces centripète & centrifuge deviennent égales, & c'est ce que donne aussi l'expression $\frac{u u}{R}$, que nous avons pour la force centrifuge; car quand $u = \sqrt{2 k . \frac{1}{2} R}$, (où k répréſente la force centripète), on a $\frac{u u}{R} = k =$ à la force centripète. Que le corps commence donc au point le plus haut à tourner avec une viteſſe $= \sqrt{(2 g . \frac{1}{2} a)} = \sqrt{g a}$, sa force centrifuge fera préciſément en équilibre avec l'action de la gravité; il n'y aura donc dans ce premier moment aucune tenſion du fil, toutes les ordonnées z seront $= 0$, & le corps, au lieu de décrire une epicycloïde, ne décrira d'abord qu'un petit arc du cercle immobile, dont le rayon $= a$, jusqu'à ce qu'après un tems infiniment petit la force centrifuge ait pris le deſſus sur l'action de la gravité, enſorte que les z commencent à prendre une petite valeur, & que le corps décrive des epicycloïdes, qui d'abord seront incomparablement plus applaties que les suivantes, qui répondront a des angles ω plus grands. Tout ceci

est

eſt parfaitement d'accord avec ce qui réſulte de nos formules. En effet, nous avons vu, que la plus grande ordonnée, quand $\omega = 0$, étoit $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a)$; or cette expreſſion devient $= 0$, quand $f = \frac{1}{2}a$. L'angle Φ au contraire ne devient pas pour cela auſſi $= 0$, mais ſon expreſſion $360° \sqrt{\frac{4Mf\theta}{Paa}}$ ſe change en celle-ci $360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}}$. Si ω augmente juſqu'à devenir $= \psi$, que je ſuppoſe être un angle fort petit encore, on aura $\text{cof.}\,\omega = \text{cof.}\,\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi\psi$. Delà

$$\Phi = 360° \sqrt{\frac{4M\theta(f + a - a\,\text{cof.}\,\omega)}{Paa}} = 360° \sqrt{\frac{2M\theta(1 + \psi\psi)}{Pa}}$$
$$= 360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}},$$

puiſqu'on pourra négliger encore le $\psi\psi$ en comparaiſon de l'unité. Pour la plus grande ordonnée

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega),$$

elle ſe changera, en faiſant les mêmes ſubſtitutions, en $\frac{3M\theta\psi\psi}{P}$, deſorte que le rapport de la plus grande ordonnée de l'epicycloïde à ſa baſe, l'arc $a\Phi$, ſera exprimé par

$$\frac{3M\theta\psi\psi}{P} : a\,360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}} = \frac{\psi\psi}{120°} \sqrt{\frac{M\theta}{2Pa}}.$$

Mais quand $\omega = 90°$ ou $270°$, la plus grande ordonnée z devient $= \frac{6M\theta}{Pa}$, & la baſe $a\Phi = a\,360° \sqrt{\frac{6M\theta}{Pa}}$, enſorte que le rapport entre z & $a\Phi$ eſt $= \frac{1}{120°} \sqrt{\frac{2M\theta}{3Pa}}$; & quand $\omega = 180°$, ce rapport devient $= \frac{1}{120°} \sqrt{\frac{8M\theta}{5Pa}}$. Ces differens rapports ſont donc entre eux, comme $\psi\psi \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{8}{3}}$. D'où l'on voit que ce rapport eſt le plus grand, & qu'on a l'epicycloïde la plus élargie au point le plus bas, où $\omega = 180°$; & qu'au contraire, comme ψ eſt ſuppoſé extrêmement petit, ce rapport eſt encore, pour ainſi dire, infiniment petit, & donne des epicycloïdes ſi applaties vers les régions les plus élevées du mouvement, qu'elles ſe confondent presque avec le cercle qui leur ſert de baſe.

§. 21.

§. 21. Il nous reſte une remarque à faire, ſavoir que la plus petite viteſſe gyratoire, que notre calcul permette de ſuppoſer, doit être telle, que $f = \frac{1}{2} a$. Car ſi $f < \frac{1}{2} a$, on aura, auſſi long-tems que ω ne ſera pas fort grand, des z négatives, & dans non prémier Mémoire j'ai expliqué ſuffiſamment les raiſons, qui ne permettent pas de former des ſuppoſitions, qui donneroient des quantités négatives pour z.

§. 22. Jusqu'ici je n'ai pas encore parlé du tems, que le corps employera à décrire quelque arc que ce ſoit de ſa courbe. Comme cette recherche ſeule demande des calculs aſſés prolixes, j'ai cru qu'il vaudroit mieux la renvoyer à la fin du Mémoire: & c'eſt de quoi ſeul il nous reſte donc à nous occuper. La formule générale pour l'expreſſion du tems eſt $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, qui dans notre cas préſent ſe change en celle-ci

$$\partial t = \frac{a\,\partial\omega}{\sqrt{(2c - 2g\,a\,cos.\,\omega)}} = \frac{a}{\sqrt{2c}} \times \frac{\partial\omega}{\sqrt{(1 - \lambda\,cos.\,\omega)}},$$

(en faiſant $\frac{g\,a}{c} = \lambda$). Or $(1 - \lambda\,cos.\,\omega)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\lambda\,cos.\,\omega + \frac{1.3}{2.4}\lambda^2\,cos.\,\omega^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3\,cos.\,\omega^3 + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4\,cos.\,\omega^4}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5\,cos.\,\omega^5}{2.4.6.8.10} + \&c.$

Donc

$$t = \frac{a}{\sqrt{2c}}\left(\int\partial\omega + \frac{1}{2}\lambda\int\partial\omega\,cos.\,\omega + \frac{1.3\,\lambda^2}{2.4}\int\partial\omega\,cos.\,\omega^2 + \frac{1.3.5\,\lambda^3}{2.4.6}\int\partial\omega\,cos.\,\omega^3 + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{2.4.6.8}\int\partial\omega\,cos.\,\omega^4 + \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5}{2.4.6.8.10}\int\partial\omega\,cos.\,\omega^5 + \&c.\right).$$

Or $\int\partial\omega = \omega$, et $\frac{1}{2}\lambda\int\partial\omega\,cos.\,\omega = \frac{1}{2}\lambda\,sin.\,\omega$. De plus, faiſant $cos.\,\omega = p$, on a

$$\int\partial\omega\,cos.\,\omega^2 = \int\frac{-p\,p\,\partial p}{\sqrt{(1-p\,p)}} = \frac{1}{2}p\sqrt{(1-p\,p)} - \frac{1}{2}A\,.\,sin.\,p.$$

$$\int\partial\omega\,cos.\,\omega^3 = \int\frac{-p^3\,\partial p}{\sqrt{(1-p\,p)}} = \frac{1}{3}p\,p\sqrt{(1-p\,p)} + \frac{1}{3}p\sqrt{(1-p\,p)} - \frac{1}{3}A\,.\,sin.\,p.$$

$\int\partial\omega$

$$\int \partial\omega \cos.\omega^4 = \int \frac{-p^4\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{4}p^3\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{3}{4}pp\sqrt{(1-pp)}$$
$$+\tfrac{3}{4}p\sqrt{(1-pp)} - \tfrac{3}{4}\mathrm{A}.\sin.p.$$
$$\int \partial\omega \cos.\omega^5 = \int \frac{-p^5\,\partial p}{1-pp} = \tfrac{1}{5}p^4\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{4}{5}p^3\sqrt{(1-pp)}$$
$$+\tfrac{8}{5}pp\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{8}{5}p\sqrt{(1-pp)} - \tfrac{8}{5}\mathrm{A}.\sin.p.$$

Substituant de nouveau pour p & $\sqrt{(1-pp)}$ leurs valeurs $\cos.\omega$ & $\sin.\omega$, & pour $\mathrm{A}.\sin.p$, $90^\circ - \omega$, on aura donc, en ajoutant la constante D,

$$t = \frac{a}{\sqrt{2c}}\Big[\mathrm{D} + \omega + \tfrac{1}{2}\lambda\Big)\sin.\omega$$
$$- \frac{1.3}{2.4}\lambda^2(90^\circ - \omega) + \frac{1.3}{2.4}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3(\ldots) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\ldots + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\omega\cos.\omega^2$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\lambda^4(\ldots) + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\ldots + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\ldots + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.\omega\cos.\omega^3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \&c.$$
$$- \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n.2.3.6\ldots.2n}\lambda^n(\ldots) + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n.2.4.6\ldots.2n}\lambda^n + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n.2.4.6\ldots.2n}\lambda^n\ldots + \&c.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$- \frac{1.3.5\ldots.2\infty}{\infty.2.4.6\ldots.2\infty}\lambda^\infty + \frac{1.3.5\ldots.2\infty}{\infty.2.4.6\ldots.2\infty}\lambda^\infty + \frac{1.3.5\ldots.2\infty}{\infty.3.4.6\ldots.2\infty}\lambda^\infty + \&c.\Big]$$

ces termes de la derniére suite sont tous $= 0$, puisque λ est une fraction plus petite que l'unité. En effet C étant $= g.a + g\int$, on a $\lambda = \frac{a}{g2+f}$, & f ne pouvant, comme nous avons vu, être plus petit que $\frac{1}{2}a$, λ ne pourra pas non plus être plus grand que $\frac{1}{3}$; d'où l'on voit que les séries verticales

ſont toutes aſſés convergentes, & la manière, dont ces ſéries ſe ſont formées, montre, qu'on n'eſt obligé de prendre qu'autant de ces ſéries, qu'on prend de termes dans chacune. Mais ſi l'on ne veut ſavoir le tems que pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'eſt à dire quand $\omega = 0, 90°, 180°, 270°, 360°$, &c., toutes ces ſéries, à l'exception d'une ſeule, s'evanouïront, parceque dans tous ces points on a ou ſin. ω ou coſ. $\omega = 0$.

§. 23. Pour déterminer la conſtante, on remarquera, que t & ω doivent être en même tems $= 0$, ce qui donne $0 = \frac{a}{\sqrt{2C}} (D - \frac{1.3\lambda^2 90°}{2.2.4} - \frac{1.3.5\lambda^3 90°}{3.2.4.6} - \frac{1.3.5.7\lambda^4 90°}{4.2.4.6.8} - \frac{1.3.5.7.9\lambda^5 90°}{5.2.4.6.8.10} - \text{&c.})$ d'où l'on a, en faiſant $180° = \pi$

$$D = \frac{\pi}{2} (\frac{1.3\lambda^2}{2.2.4} + \frac{1.3.5\lambda^3}{3.2.4.6} + \frac{1.3.5.7\lambda^4}{4.2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7.9\lambda^5}{5.2.4.6.8.10} + \text{&c.}).$$

§. 24. Nommant t' le tems employé à parcourir le premier quart-de-cercle, t'' celui requis pour les deux premiers, t''' celui pour les trois premiers, &c. on aura

$$t' = \frac{a}{\sqrt{2C}} (\frac{\pi+\lambda}{2} + D); \qquad t'' = \frac{a}{\sqrt{2C}} (\pi + 2D);$$
$$t''' = \frac{a}{\sqrt{2C}} (\frac{3\pi-\lambda}{2} + 3D); \qquad t^{IV} = \frac{a}{\sqrt{2C}} (2\pi + 4D);$$
$$t^{V} = \frac{a}{\sqrt{2C}} (\frac{5\pi+\lambda}{2} + 5D); \qquad t^{VI} = \frac{a}{\sqrt{2C}} (3\pi + 6D);$$
$$t^{VII} = \frac{a}{\sqrt{2C}} (\frac{7\pi-\lambda}{2} + 7D); \qquad t^{VIII} = \frac{a}{\sqrt{2C}} (4\pi + 8D);$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

§. 25. Puiſque donc tout dépend principalement de la conſtante D, commençons par la chercher pour un cas particulier, en ſuppoſant $f = a$, ce qui donne $C = 2ga$, & $\lambda = \frac{1}{2}$. On aura donc

$$\frac{1.3\,\lambda^2}{2.2.4} = \frac{3}{64} = 0.0469$$

$$\frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.4.6} = \frac{5}{384} = 0.0130$$

$$\frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8} = \frac{35}{8192} = 0.0043$$

$$\frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5}{5.2.4.6.8.10} = \frac{63}{40960} = 0.0015$$

$$\frac{1.3.5.7.9.11\,\lambda^6}{6.2.4.6.8.10.12} = \frac{231}{393216} = 0.0006$$

$$\frac{1.3.5.7.9.11.13\,\lambda^7}{7.2.4.6.8.10.12.14} = \frac{3003}{12845056} = 0.0003$$

$$0.0666.$$

On a donc $D = \frac{\pi}{2}(0.0666) = \frac{1}{30}\pi$. Et comme pour cet exemple on a $\frac{a}{12c} = \sqrt{\frac{a}{4g}}$, on déterminera donc facilement en secondes le tems employé à décrire différens quarts-de-cercle, si l'on exprime a en telles mesures qu'on veut, pourvû qu'on donne en même tems à g la valeur requise. Ainsi a étant exprimée en pieds de France, g sera $= 30.167$. Le tems employé à décrire un tour entier, ou t^{IV}, sera

$$= \sqrt{\frac{a}{4g}}\left(2\pi + \frac{4}{30}\pi\right) = \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Si l'on veut que ce tems soit justement d'une seconde, on fera $\frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 1$, ce qui donne $a = \frac{15 \cdot 15\,g}{16 \cdot 16\,\pi\pi} = \frac{15 \times 15 \times 30.167}{16 \times 16 \times \pi\pi} = 2$ pieds, 7 pouces de France. Si au contraire la longueur a est précisément celle du pendule simple à secondes, c'est-à-dire $a = \frac{30.167}{\pi\pi}$, le tems d'une révolution entière sera

$$= \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{30.167}{30.167\,\pi\pi}} = 1\frac{1}{15} \text{ secondes.}$$

ESSAY
RELATIF AUX RECHERCHES DE M. DE LA GRANGE
SUR
L'ATTRACTION DES SPHEROIDES ELLIPTIQUES.

PAR
W. L. KRAFFT.

Lu à l'Académie le 8 Mars 1787.

I.

M. *de la Grange*, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1773, a donné une nouvelle méthode on ne peût plus ingenieuſe de déterminer l'attraction d'un Sphéroïde elliptique ſur un corpuſcule placé dans un endroit quelconque. Après avoir remarqué, que ce problème eſt du nombre de ceux, auxquels l'Analyſe paroit en quelque ſorte inſuffiſante, & la Syntheſe ſeule capable d'atteindre, il obſerve, qu'il eſt extremement ſurprenant, que depuis Maclaurin, qui dans ſon Traité ſur le flux & le reflux de la mer a reſolû le premier ce problème par un chef-d'oeuvre de Syntheſe, il n'ait pas été reſolû d'une maniere directe & analytique; que la cauſe en doit être attribuée aux difficultés que renferme l'integration des différentielles, auxquelles on parvient, lorsqu'on enviſage ce problème ſous un point de vûe purement analytique; & qu'il paroit, qu'on n'a pû y réuſſir jusqu'à-préſent, qu'en ſe bornant à l'hypotheſe,

que

que le Sphéroïde ſoit très peu différent d'une Sphére, ou en ſe contentant, à la place d'une ſolution rigoureuſe, d'une ſimple approximation par le moyen des ſeries.

2.) Le but, que M. *de la Grange* ſe propoſe dans cet excellent mémoire, eſt de faire voir, que bien loin que le problème, dont il s'agit, ſe refuſe à l'Analyſe, il peut par ce moyen être reſolù même plus directement & plus généralement, que par la voye de la Syntheſe; ce, que cet illuſtre Géometre a executé d'une façon extremement judicieuſe, en employant un rayon vecteur tiré du corpuſcule attiré à l'élément attirant du Sphéroide avec deux angles, qui en déterminent la poſition, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on ſe ſert pour cet effet dans l'Analyſe ordinaire des problèmes de cette eſpéce. Avant que de donner ſa nouvelle méthode & pour faire voir, combien il eſt important dans cette recherche, d'employer à la place des trois coordonnées orthogonales d'autres variables, qui puiſſent faciliter les intégrations, qu'elle demande, M. *de la Grange* fait ſentir les difficultés de la méthode ordinaire, en l'appliquant au cas le plus ſimple du problème, où le corps attirant ſeroit une Sphére; & il conclut, qu'en s'y prennant par le moyen des trois coordonnées orthogonales il ſera presqu' impoſſible de déterminer l'attraction même d'une Sphére ſur un corpuſcule placé dans un endroit quelconque, qu'il obſerve être, cependant facile à trouver en enviſageant la Sphére comme partagée en une infinité de petits cylindres, ayant pour leur axe commun la ligne, qui joint le corpuſcule attiré & le centre de la Sphére. On contribueroit ſans doute beaucoup au but de ce mémoire de M. *de la Grange*, ſi l'on trouvoit moyen de déterminer par le procedé des trois coordonnées orthogonales l'attraction des Sphéroides elliptiques ſur un corpuſcule

placé dans un endroit quelconque & conſéquemment de reſoudre par la voye analytique ordinairement employée dans cette eſpece de recherches les problèmes, dont la plûpart n'ont pû ſe refuſer aux moyens ingénieux de ſa nouvelle méthode. Ce n'eſt qu'en forme d'un petit eſſay de cette eſpece, que j'ai crû pouvoir faire ici l'expoſé d'une telle ſolution de deux cas du problème, lorsque le corpuscule attiré ſe trouve dans un point quelconque de l'axe de revolution, ou ſous l'equateur à la ſurface du ſphéroïde, d'autant plus, que ces deux cas ont été auſſi traités par M. *Euler* dans un mémoire inſéré au Tome X. des Commentaires de l'Académie, où par une approximation moyennant des ſeries, il calcule l'attraction d'un Sphéroïde de revolution ſur un point placé à la ſurface ſous le Pole ou ſous l'Equateur du Sphéroïde.

Problème I.

Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique exerce ſur un corpuscule placé dans un point quelconque de l'axe de revolution, en ſuppoſant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances.

Toutes les ſurfaces du 2 ordre, qui ſont renfermées dans un eſpace fini, étant repréſentées par l'équation $z^2 + mx^2 + ny^2 = k^2$ où m & n ſont des coëfficiens poſitifs quelconques & le commencement des abſciſſes pris dans le centre de la ſurface; ſi l'on y fait $m = n$ l'équation $z^2 + m(x^2 + y^2) = k^2$ repréſente un Sphéroïde elliptique formé par la révolution d'une ellipſe, dont l'équation ſeroit $z^2 + mu^2 = k^2$, autour de l'axe des abſciſſes z (voy. le Mem. de M. *la Grange*, §. 6.) Mettons $z = k - v$; & nous aurons $v^2 + mu^2 = 2kv$ pour l'équation de l'ellipſe & $v^2 + m(x^2 + y^2) = 2kv$ pour l'équation à la ſurface du Sphéroïde engendré par la revolution de cette

cette ellipſe autour de l'axe des abſciſſes v, dont le commencement ſera pris dans le ſommet de l'axe.

Soit α l'élément du Sphéroïde, dont la poſition ſoit déterminée par les trois coordonnées orthogonales v, y & t, enſorte que $\alpha = \partial v . \partial y . \partial t$. Soit e la diſtance entre le corpuscule attiré dans l'axe de révolution & le ſommet de l'axe; enſorte, que ce corpuscule étant ſuppoſé être hors du Sphéroïde, ſa diſtance à l'élément α du Sphéroïde ſoit

$$\sqrt{((v+e)^2+y^2+t^2)} = D.$$

On aura donc $\frac{\partial v \partial y \partial t}{D^2}$ pour l'élément de l'attraction ſuivant la ligne, qui joint le corpuscule attiré & la particule α du Sphéroïde, laquelle étant décompoſée ſuivant la direction des trois coordonnées v, y & t donne les trois attractions élémentaires

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y . \partial t}{D^3}; \quad \frac{y \partial y \partial v \partial t}{D^3} \quad \& \quad \frac{t \partial t . \partial v . \partial y}{D^3}.$$

Or comme il eſt evident par la nature de la choſe même, que les deux attractions perpendiculaires à l'axe de revolution ſeront nulles; il ne reſte, que l'attraction ſuivant l'axe de revolution, dont l'élément eſt

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y . \partial t}{((v+e)^2+y^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale de cette differentielle par rapport à la ſeule variable t ſe trouve

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y}{((v+e)^2+y^2)} \cdot \frac{t}{\sqrt{((v+e)^2+y^2+t^2)}}.$$

Or la valeur extreme de t, qui répond à la ſurface du ſolide, étant $t = x$; on aura $t = \mp \sqrt{\frac{2kv - v^2 - my^2}{m}}$, & l'integrale priſe en ſorte, qu'elle ſoit $= 0$ lorsque $t = 0$, & étendue à ces deux valeurs extremes de t, ſe change en celle-cy:

$$\frac{2(v+e)\partial v}{\sqrt{(2kv - v^2 + m(e+v)^2)}} \cdot \frac{\partial y . \sqrt{(2kv - v^2 - my^2)}}{(v+e)^2+y^2)}.$$

Inte-

Integrant cette differentielle par rapport à la variable y, & faiſant pour abreger

$$\frac{m e^2}{1-m} = \alpha ; \quad \frac{k + m e}{1-m} = \beta ;$$

$$\frac{\sqrt{(2kv - v^2 - my^2)}}{y} = Y, \text{ \& } \frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}}{v+e} = V$$

nous aurons l'integrale

$$\frac{2}{\sqrt{(1-m)}} \cdot \frac{\partial v}{V} \left[\sqrt{m} . \text{Arc. tg.} \frac{Y}{\sqrt{m}} - V . \sqrt{(1-m)} . \text{Arc. tg.} \frac{Y}{V . \sqrt{(1-m)}} + \text{Conſt.} \right]$$

Or la valeur extreme de y, qui répond à la ſurface du Sphéroïde, étant $y = u$; on aura $y = \mp \sqrt{\frac{2kv - v^2}{m}}$, & l'integrale priſe enſorte, qu'elle evanouiſſe lorsque $y = 0$ & étant étendûe à ces deux valeurs extremes de y ſe transforme en celle-cy:

$$\partial v \left(1 - \frac{(v+e) . \sqrt{m}}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)} \sqrt{(1-m)}} \right) . 360^\circ .$$

Avant que d'integrer par rapport à la variable v il faut diſtinguer deux cas, ſuivant que le corpuscule attiré ſe trouve au dehors ou au dedans du Sphéroïde, & que conſequemment la diſtance e eſt poſitive ou negative. Le cas intermediaire, où le corpuscule attiré eſt placé à la ſurface meme du Sphéroïde, & conſequemment $e = 0$, ſe réduit aiſément à l'un ou l'autre des deux cas precedens.

Cas premier: *Le corpuscule attiré etant hors du Sphéroïde.*

Pour ce cas on a $\alpha = \frac{m e^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k + m e}{1-m}$. Integrant par rapport à la variable v & faiſant pour abreger

$$\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)} = U ,$$

on aura l'intégrale

$$\left[v + U . \sqrt{\frac{m}{1-m}} - (\beta + e) \sqrt{\frac{m}{1-m}} . \text{Arc. tang.} \frac{U}{\beta - v} + \text{Conſt.} \right] . 360^\circ$$

& cette integrale doit s'evanouir pour la valeur $v = 0$ & étre étendue a la valeur $v = 2k$. Or pour ces deux valeurs de v, on a

$U =$

$$U = \sqrt{\alpha} \;\&\; U = (2k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}},$$

$$\beta - v = \beta \;\&\; \beta - v = \frac{(2k+e)m-k}{1-m},$$

moyennant quoi l'integrale complette ſera

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k-(k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\left[\begin{matrix}\text{Arc. tang.}\frac{(2k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(2k+e)m-k}\\ -\text{Arc. tang.}\frac{e\sqrt{m(1-m)}}{k+me}\end{matrix}\right]\right)$$

la quelle, en réduiſant la différence des deux arcs en un ſeul, ſe change en celle-cy

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k-(k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{2k(k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(k+e)^2.m-k^2(1-m)}\right).$$

Or cet arc étant le double de celui, qui a $\frac{k}{k+e}\sqrt{\frac{1-m}{m}}$ pour tangente, l'integrale trouvée ſera

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k-2(k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{k}{k+e}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)$$

& comme $k+e$ deſigne la diſtance du corpuscule attiré au centre du Sphéroïde, en mettant cette diſtance $= c$, on aura

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k-2\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{k}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}}\right) \quad \ldots$$

pour la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce dans la direction de l'axe de revolution ſur un corpuscule placé dans le prolongement de cet axe à la diſtance c du centre, & cette valeur eſt parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée M. *de la Grange*.

Cas ſecond: Le corpuscule attiré etant au dedans du Sphéroide.

Pour ce cas en prenant e negative, on a $\alpha = \frac{me^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k-me}{1-m}$, & l'attraction du Sphéroïde vers ſon centre ſur un corpuscule placé au dedans dans ſon axe de revolution ſera

$$\int.\partial v\left(1-\frac{(v-e)}{\sqrt{(\alpha+2\beta v-v^2)}}\cdot\sqrt{\frac{m}{1-m}}\right)\cdot 360^\circ\left[\begin{matrix}\text{de } v=e\\ \text{jusqu'à } v=2k\end{matrix}\right]$$

$$-\int.\partial v\left(1-\frac{(e-v)}{\sqrt{(\alpha+2\beta v-v^2)}}\cdot\sqrt{\frac{m}{1-m}}\right)\cdot 360^\circ\left[\begin{matrix}\text{de } v=0\\ \text{jusqu'à } v=e\end{matrix}\right].$$

Or ſi nous deſignons par E, 2K & O les valeurs de la quantité U pour les cas $v=e$, $v=2k$ & $v=0$, on aura

$$\int.\partial v\left(1-\frac{(v-e)}{\sqrt{(\alpha+2\beta v-v^2)}}\cdot\sqrt{\frac{m}{1-m}}\right)\cdot\left[\begin{matrix}\text{de } v=e\\ \text{jusqu'à } v=2k\end{matrix}\right]$$

$$=2k-e+[2K-E]\sqrt{\frac{m}{1-m}}-(\beta-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\left[\begin{matrix}\text{Arc. tang.}\frac{2K}{\beta-2k}\\ -\text{Arc. tg.}\frac{E}{\beta-e}\end{matrix}\right]$$

et

$$\int.\partial v\left(1-\frac{(e-v)}{\sqrt{(\alpha+2\beta v-v^2)}}\sqrt{\frac{m}{1-m}}\right)\left[\begin{matrix}\text{de } v=0\\ \text{jusqu'à } v=e\end{matrix}\right]$$

$$=e-[E-O]\sqrt{\frac{m}{1-m}}+(\beta-e)\left(\text{Arc. tang.}\frac{E}{\beta-e}-\text{Arc. tang.}\frac{O}{\beta}\right),$$

& conſequemment l'attraction cherchée ſera

$$360^\circ\left(2(k-e)+(2K-O)\sqrt{\frac{m}{1-m}}-(\beta-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\left[\begin{matrix}\text{Arc. tang.}\frac{2K}{\beta-2k}\\ -\text{Arc. tang.}\frac{O}{\beta}\end{matrix}\right]\right).$$

Or on trouve

$$2K=(2k-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}};\quad O=e\sqrt{\frac{m}{1-m}}$$

$$\beta-e=\frac{k-e}{1-m}\text{ et }\beta-2k=\frac{(2k-e)m-k}{1-m}.$$

Subſtituant ces valeurs, on change l'expreſſion precedente en celle-ci :

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2(k-e)-(k-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\left[\begin{matrix}\text{Arc. tang.}\frac{(2k-e)\sqrt{m(1-m)}}{(2k-e)m-k}\\ -\text{Arc. tang.}\frac{e\sqrt{m(1-m)}}{k-me}\end{matrix}\right]\right),$$

ou en reduiſant la difference des deux arcs en un ſeul, en celle cy :

360°

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left[2(k-e)-(k-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\cdot \text{Arc. tang.}\frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1}\right].$$

Or on fait, que

$$\text{Arc. tang.}\frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1} = 2\cdot\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}},$$

moyennant quoi & en mettant $k-e=c$, qui defigne la diſtance du corpuſcule attiré au centre du Sphéroïde, on aura

$$360^\circ\cdot\frac{2c}{1-m}\left(1-\sqrt{\frac{m}{1-m}}\cdot\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction, que le Spheroïde exerce vers ſon centre ſur un corpuſcule placé au dedans dans ſon axe de revolution à la diſtance c du centre, & cette valeur eſt parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée Mr. *de la Grange*.

4.) Pour le cas intermediaire, où le corpuſcule attiré ſe trouve à la ſurface du Sphéroïde, l'un & l'autre des deux cas precedens, à cauſe de $e=0$ & conſequemment $c=k$, donne

$$360^\circ\cdot\frac{2k}{1-m}\left(1-\sqrt{\frac{m}{1-m}}\cdot\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction du Sphéroïde ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface dans ſon axe de revolution, & cette valeur, que nous venons de trouver, eſt la ſomme de la ſerie infinie, que Mr. *Euler* a donnée pour cette attraction.

Probleme II.

5.) *Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique exerce ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface ſous l'Equateur, en ſuppoſant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances.*

Les abſciſſes v etant priſes ſur l'axe de l'Equateur $=2A$ & de ſon ſommet, l'appliquee orthogonale étant u, on aura

$u^2 + m v^2 = 2 A m v$ pour l'equation de l'ellipſe, qui tournant autour de l'axe parallele à celui des appliquées u engendre le Sphéroïde elliptique, qui ſera repreſenté par l'equation

$$y^2 + m (v^2 + x^2) = 2 A m . v.$$

Soit α l'element du Sphéroïde, dont la poſition ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales v, x et t, enſorte que $\alpha = \partial v . \partial x . \partial t.$ & la diſtance de cet element au corpuſcule attiré $= \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}$; on aura, comme cy deſſûs, $\frac{v \partial v \partial x \partial t}{(v^2 + x^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$, pour l'element de l'attraction ſelon l'axe de l'Equateur, lequel par rapport à la ſeule variable t donne l'integrale $\frac{v \partial v . \partial x \; t}{(v^2 + x^2) \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}}$. Or la valeur extreme de t, qui repond à la ſurface du Sphéroïde, étant $t = y$; on aura $t = \mp \sqrt{m . (2 A . v - v^2 - x^2)}$, et l'integrale etendûe à ces deux valeurs extremes de t ſera transformée en celle-ci :

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x \sqrt{(2 A v - v^2 - x^2)}}{(v^2 + x^2) \sqrt{(2 A m v + (1 - m)(v^2 + x^2))}}$$

différentielle, qu'il n'y a pas moyen d'integrer généralement. Soit pour abreger $2 A v - v^2 = \alpha^2$; $2 A v = \beta$ et $1 - m = \delta$; la différentielle propoſée ſera

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x.}{\beta - (\alpha^2 - x^2)} \sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{\beta - \delta (\alpha^2 - x^2)}}.$$

En developpant le denominateur ſuivant les puiſſances de $(\alpha^2 - x^2)$ & faiſant pour abreger:

$$P = (1 + \tfrac{1}{2} \delta) . \tfrac{1}{\beta};$$

$$Q = (1 + \tfrac{1}{2} \delta + \tfrac{1 . 3}{2 . 4} \delta^2) . \tfrac{1}{\beta^2};$$

$$R = (1 + \tfrac{1}{2} \delta + \tfrac{1 . 3}{2 . 4} \delta^2 + \tfrac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} \delta^3) . \tfrac{1}{\beta^3},$$

&c.

on aura la différentielle :

$$\frac{2\sqrt{m}\,.\,v\,\partial v}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,\partial x\,\sqrt{(\alpha^2-x^2)}\left\{\begin{array}{l}1+P(\alpha^2-x^2)\\ +Q(\alpha^2-x^2)^2\\ +R(\alpha^2-x^2)^3\\ +\&c.\end{array}\right\}$$

Or les valeurs extremes de x étant

$$x=\mp\sqrt{(2Av-v^2)}=\mp\alpha;$$

l'integrale de cette differentielle doit être prise pour les deux termes d'integration $x=+\alpha$ & $x=-\alpha$; & l'on fait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int.\partial x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}=\frac{(2\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\alpha^2\,.\int.\partial x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}}.$$

En vertù de ce theoreme du calcul integral, l'integrale sera

$$\frac{2\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,v\,\partial v\,(1+\tfrac{3}{4}\alpha^2P+\tfrac{3.5}{4.6}\alpha^4Q+\tfrac{3.5.7}{4.6.8}\alpha^6\,.\,R+\ldots)\int\partial x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}.$$

Or pour ces mêmes termes d'integration, on a

$$\int.\partial x\,\sqrt{(\alpha^2-x^2)}=\mp\tfrac{1}{2}\alpha^2\,.\,90^\circ,$$

donc en faisant pour abreger

$$1+\tfrac{3}{4}\alpha^2\,.\,P+\tfrac{3.5}{4.6}\alpha^4\,.\,Q+\ldots\ldots=S,$$

l'integrale de la differentielle par rapport à la variable x sera $\frac{180^\circ\,.\,S\,.\,\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,\alpha^2\,.\,v\,\partial v$. Or puisque $\alpha^2=2Av-v^2$; $\beta=2Av$ & conſequemment $\frac{\alpha^2}{\beta}=1-\frac{v}{2A}$; on aura

$$S=1+\tfrac{3}{4}(1+\tfrac{1}{2}\delta)\,(1-\tfrac{v}{2A})+\tfrac{3.5}{4.6}(1+\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1.3}{2.4}\delta^2)\,(1-\tfrac{v}{2A})^2+\&c.$$

& en faiſant $1-\frac{v}{2A}=u$, & l'axe de revolution $=2B$, en ſorte que $m=\frac{B^2}{A^2}$ la differentielle propoſée ſera

$$-360^\circ.\,B.\,S.\,u\,.\,\partial u\,\sqrt{(1-u)}$$

$$=-360^\circ.\,B\,.\,\partial u\,.\,\sqrt{(1-u)}\left\{\begin{array}{l}u+\frac{3}{4}(1+\frac{1}{2}\delta)\,.\,u^2\\ +\frac{3.5}{4.6}(1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1.3}{2.4}\delta^2)\,u^3\\ +\&c.\end{array}\right.$$

Or les valeurs extremes de v étant $v=0$ & $v=2A$; il eſt clair, que l'integrale de cette differentielle par rapport à la

variable u doit être prise pour les deux termes d'integration $u = 1$ & $u = 0$ & on sait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int u^{\lambda} \partial u \sqrt{(1-u)} = \frac{2\lambda}{2\lambda+3} \int . u^{\lambda-1} . \partial u . \sqrt{(1-u)}.$$

En vertù de ce theoreme du calcul integral la différentielle proposée deviendra :

$$-6 . B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) \\ \quad + \frac{1.1}{7.9} . \left(1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1.3}{2.4}\delta^2\right) \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right\} \int . \partial u \sqrt{(1-u)},$$

& consequemment l'integrale :

$$4B . 360^{\circ} \left(\frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) + \frac{1.1}{7.9}\left(1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1.3}{2.4}\delta^2\right) + \text{\&c.}\right.$$

$$\text{Soit } \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7} + \frac{1.1}{7.9} + \ldots\ldots = \Sigma,$$

& l'integrale trouvée sera

$$4B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma + \frac{1}{2}\delta\left(\Sigma - \frac{1.1}{3.5}\right) + \frac{1.3}{2.4}\delta^2\left(\Sigma - \frac{1.1}{3.5} - \frac{1.1}{5.7}\right) \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Or comme on a en général

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots . = \frac{1}{ab},$$

on aura en mettant $a = 3$ & $b = 2$

$$\Sigma = \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7} + \frac{1.1}{7.9} + \text{\&c.} = \frac{1}{6},$$

& consequemment

$$\Sigma - \frac{1.1}{3.5} = \frac{1.1}{2.5}; \quad \Sigma - \frac{1.1}{3.5} - \frac{1.1}{5.7} = \frac{1.1}{2.7} \text{ \&c.}$$

& substituant ces valeurs on aura l'integrale

$$2B . 360^{\circ} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} . \frac{\delta}{5} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{\delta^2}{7} + \text{\&c.}\right).$$

Soit la somme de cette serie $= X$, ensorte que

$$X . \delta \sqrt{\delta} = \frac{1}{3}\delta^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} . \frac{\delta^{\frac{5}{2}}}{5} + \text{\&c.} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \delta \sqrt{\delta}}{\sqrt{(1-\delta)}}.$$

Con-

Conſequemment en faiſant $\sqrt{\delta} = \text{ſin. } \Phi$; on aura

$$X\,\delta\sqrt{\delta} = \int . \partial\Phi . \text{ſin. } \Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\text{ſin. } \Phi . \text{cof. } \Phi ;$$

d'où l'on trouve

$$X = \tfrac{1}{2\delta\sqrt{\delta}} . \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta} - \tfrac{1}{2} . \tfrac{\sqrt{(1-\delta)}}{\delta}$$

& cette valeur étant ſubſtituée, on aura l'expreſſion finie

$$360^\circ \tfrac{B}{\delta} \left[\tfrac{1}{\sqrt{\delta}} . \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)} \right],$$

ou en exprimant l'arc par la tangente

$$360^\circ . \tfrac{B}{\delta} \left[\tfrac{1}{\sqrt{\delta}} . \text{Arc. tang. } \sqrt{\tfrac{\delta}{1-\delta}} - \sqrt{(1-\delta)} \right].$$

Ce qui eſt la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface ſous l'Equateur, & cette valeur s'accorde avec celle, qu'on trouve par la nouvelle méthode de M. *de la Grange*. Elle doit auſſi être la ſomme de la ſerie infinie, que M. *Euler* a donnée pour la valeur de cette attraction, ce qui paroit difficile à demontrer directement à cauſe de la complication de cette ſerie.

6.) En mettant $m = 1$, et conſequemment $\delta = 0$, on obtient $\frac{2}{3} . \frac{BB}{cc} . 360^\circ$; $\frac{2}{3} B . 360^\circ$ & $\frac{2}{3} c . 360^\circ$ pour les valeurs des attractions, qu'une Sphére, dont le rayon $= B$, exerce vers ſon centre ſur un corpuſcule placé en dehors à la diſtance c du centre, ou à la ſurface, ou en dedans à la diſtance c du centre de la Sphére, comme il eſt connû d'ailleurs.

7.) En reſumant les reſultats des calculs precedens, nous avons les expreſſions ſuivantes:

Attraction vers le centre du Sphéroïde dans l'axe de révolution

en

en dehors à la diſtance c du centre

$$360^\circ \cdot \frac{2}{\delta} \left[B - c \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. B} \cdot \sqrt{\frac{\delta}{c^2 + (B^2 - c^2)\delta}} \right]$$

à la ſurface

$$360^\circ \cdot \frac{2B}{\delta} \left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin.} \sqrt{\delta} \right],$$

en dedans à la diſtance c du centre

$$360^\circ \cdot \frac{2c}{\delta} \left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin.} \sqrt{\delta} \right],$$

dans l'Equateur à la ſurface

$$360^\circ \cdot \frac{B}{\delta} \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin.} \sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)} \right].$$

En ſuppoſant $A : B = 101 : 100$, M. Euler trouve que la peſanteur ſous le Pole eſt à celle ſous l'Equateur dans le rapport de 1 à 0,99803. Les expreſſions finies, que nous venons de trouver, donnent ce rapport comme 1 à 0,99773.

PHY-

PHYSICA.

RÉFLEXIONS SUR L'ANCIENNETÉ RÉLATIVE DES ROCHES ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

PAR
J. J. FERBER.

Troiſieme Section.

Préſenté à la Conférence & lu le 13 *Fevrier* 1786.

§. 19.

Il n'eſt pas rare de voir que quelques auteurs moins habitués aux récherches orologiques, qui ne connoiſſent les mineraux qu'à force de les voir ſouvent dans leurs cabinets & qui negligent leur characteres chymiques, confondent les pierres les plus ſimples & les plus faciles à connoitre, prénant par ex: pour du fluor, ce qui eſt du feldſpath ou du ſpath péſant; ou pour un quartz, ce qui eſt du fluor; pour de la zeolithe, quelque criſtalliſation calcaire ou gipſeuſe en rayons concentriques; pour un nouveau genre de roche, une pierre calcaire melée d'un peu de terre ſiliceuſe & argileuſe; pour un ſchiſte

des alpes, une ardoiſe ſecondaire; pour de la laue, quelque pierre qui y reſemble, les amygdaloïdes, le ſchiſte corné &c.; ou réciproquement les cendres, les pozzolanes, les laues & d'autres veritables productions des volcans, pour des matieres aqueuſes. Les pierres melangées, très communes dans les hautes montagnes, étant plus difficiles à connoitre & à diſtinguer, à cauſe de la grande varieté qui regne dans la proportion & la groſſeur de leurs parties integrantes mécaniquement combinées, occaſionnent encore plus de mépriſes, & reçoivent quelquefois, dans certains ouvrages, des noms qui ne leur conviennent pas du tout. Combien de fois n'a-t-on pas donné le nom de granit ou de gneiſs aux poudings, aux ophites, aux variolites, à certaines laues, à des pierres ſablonneuſes, qui en différent totalement! au contraire on a nommé grés ce qui eſt effectivement du granit! Il ne doit donc pas ſurprendre que des obſervations énoncées en faux termes s'accordent mal avec celles qui ſont faites & decrites avec plus de préciſion, & donnent lieu à de mauvaiſes conſequences qu'on ſe plait d'en tirer. Tout ce qui reſemble au premier coup d'oeil au gneiſs, au granit, ne l'eſt pas en effet. Les roches compoſées de pluſieurs eſpéces de pierres ſimples, pouvant varier infiniment en quantité, en grain, en figure, en couleur, en dureté & en liaiſon de leurs parties, il en reſulte pluſieurs nuances aſſés difficiles à determiner, ſi on n'a pas occaſion de les comparer enſemble. Quelqu'un donc qui ſe fait apporter un ou deux échantillons d'une roche, dont quelque montagne eſt compoſée, ſans la viſiter lui même, s'expoſe à s'en former une fauſſe idée, ſi ces échantillons ſont ramaſſés par des perſonnes peu verſées dans l'étude des montagnes. Avant que la connoiſſance des roches ne devienne plus générale & plus familiere à tous ceux qui entreprennent des voyages orologiques, il faut s'attendre à trouver pluſieurs

rela-

relations paradoxes de ce qu'ils ont vû, parcequ'ils designent mal les pierres examinées, faute de précision dans les termes & de correction dans la nomenclature.

§. 20. Il-y-a une autre confusion qu'il faut éviter, laquelle derive d'un prejugé assés commun; sçavoir, que dans les montagnes on rencontre tout, de même que dans les cabinets d'histoire naturelle; & que pour faire des observations orologiques il suffit de connoitre les mineraux. Il en resulte qu'on voit, sans être à même d'apprecier les objets & de distinguer les phénomenes accidentels, les jeux de la nature, de ses productions foncieres, confondant les uns avec les autres. Je m'exprime plus clairement & plus en detail. La nature en composant les montagnes n'a pas suivi scrupuleusement nos distinctions & divisions mineralogiques, qui d'ailleurs sont très utiles & très necessaires en elles mêmes pour connoitre les pierres & les mineraux, & pour en parler d'une maniere intelligible à tout le monde qui est au fait des termes & du systeme reçû. Elle n'a pas, dis-je, fait la pâte des montagnes de la meme pureté ou homogeneité, qu'il faut rechercher dans les morceaux qu'on se pique d'obtenir pour les placer dans nos cabinets, ni arrangé les rochers dans le même ordre qu'on doit garder dans leur disposition méthodique, & dans nos collections systematiques. On trouve au contraire plusieurs varietés d'une roche, qu'on separe & qu'on distingue avec raison dans les cabinets, melées & reuniés ensemble dans la même carriére. Examinons par ex: quelque montagne granitique! Nous y verrons souvent toutes les varietés de cette roche confondues ensemble. Mr. *de Saussure* fait la même rémarque. 1.) Nous y trouverons des parties, des rog-

nons,

1.) Voyage dans les Alpes, T. I. p. 105. 106.

nons, des noeuds ou petites maſſes ramaſſées, qui vraiment ſont des pierres de Gneiſs, de ſchiſte ou de porphyre, quoique le reſte de la roche, ou ſon plus grand volume, ſoit parfaitement granitique, & que ces acceſſoires n'occupent qu'un éſpace infiniment petit en comparaiſon avec le total. Ces noeuds ne ſont pourtant pas toujours des pierres étrangeres, ou des débris d'autres montagnes deplacés ou tombés par haſard dans la maſſe du granit, lorsqu'il ſe formoit. Ils ſont au contraire ſouvent une partie du granit meme & ſont formés avec lui, par la meme operation naturelle & de la meme pâte, dont eſt produit le granit. Pourvû qu'on réflechiſſe un moment, comment la nature compoſoit ces montagnes, à l'aide de l'eau ou du feu, par la criſtalliſation, la coagulation, la concretion ou par la fuſion: on n'aura point de difficulté à concevoir comment des pareilles alterations locales ont pû exiſter. Croit-on que le granit eſt une production du feu, quelle varieté ne trouve-t-on pas dans une ſeule coulée de Laue! Le prend-on pour un ouvrage de l'eau, on a lieu d'être ſurpris qu'une maſſe d'un tel volume a pû devenir uniforme par tout & autant qu'elle l'eſt en effét. À peine l'art peut-il melér ou unir, criſtalliſer ou combiner dans une quantité tant ſoit peu conſiderable 2 ou 3 ſubſtances au point, que le melange ſoit par tout le meme, encore moins ſi ce melange, cette union ſe doit faire d'un ſeul coup ou tout à la fois. Qu'on ſe repréſente donc cette maſſe énorme de matiere dont les montagnes granitiques ſont compoſées; le genre d'operation, quel qu'on voudra l'imaginer, qui les formoit; & les circonſtances qui y devoient concourrir, tant les accidents qui pouvoient ſurvenir pendant l'ouvrage: on expliquera facilement les inégalités du mélange ou de l'union & les variations locales dans l'intérieur de ces roches. On verra qu'un ſimple dérangement des molecules prêtes à s'unir de la même

même façon qu'elles ſe trouvent liées dans le reſte du granit, occaſionné par quelque remûement ou par quelque repos de la maſſe encore liquide, qui n'y avoit pas lieu auparavant, étoit plus que ſuffiſant pour déterminer les parties à ſe combiner tout autrement que dans le reſte de la maſſe. Outre cela la difference minéralogique entre le granit, le Gneiſs & le ſchiſte primitif ne conſiſte que dans la fineſſe ou dans la groſſeur du grain & dans le tiſſu feuilleté ou non feuilleté, ou plus ou moins feuilleté de ces pierres, leurs parties integrantes étant eſſentiéllément les memes. Si le ſchiſte ne montre pas ordinairement des parties de feldſpath, cela ne vient que de la réſolution argileuſe que cette pierre a éprouvée avant d'entrer dans le ſchiſte, ou peut être dans le cas dont il s'agit ici, plutôt de quelque accident qui empechoit les terres compoſantes du feldſpath de s'unir dans la proportion requiſe & de ſe criſtalliſer ſous cette forme. Le gneiſs & le granit contiennent ſouvent une terre argileuſe, toujours melée de terre ſiliceuſe, au lieu du feldſpath ou du mica: quelquefois la terre argileuſe y entre conjointement avec du mica & du feldſpath. Quant au porphyre contenu en petits amas dans l'intérieur du granit, c'eſt rarement du vrai porphyre, n'ayant pas du jaſpe, mais une terre argileuſe pour baſe; quoique d'ailleurs cette terre unie à une portion de terre ſiliceuſe & d'ochre martiale n'a qu'à ſe durcir pour former du jaspe. On voit par là qu'on vient à bout d'expliquer toutes les variations dans l'intérieur du granit par un ſimple changement de la combinaiſon méchanique des parties. Faudroit-il encore ſuppoſer quelque alteration chymique de l'union des terres contenues au commencement dans la maſſe liquide du granit, pour mieux expliquer la formation des noeuds porphyreux qu'on y trouve quelquefois? on ſait que differentes affinités ou attractions électives ont agi ſur les terres contenues,

alors

alors en état de diſſolution, dans la maſſe liquide, & qu'il y manquoit d'eſpace & de vuide pour leur combinaiſon réguliere & uniforme par tout. Il eſt certain que le granit contient toutes les terres néceſſaires pour former toutes les variations qu'on rencontre dans ſon intérieur. Qu'elles s'y formoient par ci, par là, & que ſi toute la maſſe ne ſe reſſemble pas parfaitement par tout, cela ne vient que des circonſtances & des accidents qui determinoient une partie de ces terres à s'unir autrement en quelques endroits que dans le plus grand volume de la maſſe. Nous convenons donc que les parties porphyreuſes, gneiſſeuſes & ſchiſteuſes, qui ſe trouvent par noeuds ou petites maſſes dans l'intérieur du granit, ſont de la même ancienneté, de la même formation que la roche entiere qui les recéle; mais on auroit tort d'en conclûre que le porphyre, le gneiſs & le ſchiſte qui forme des roches à part, des bandes trés épaiſſes, toujours adoſſées au granit dans les hautes montagnes, ſoit de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

§. 21. La même irrégularité accidentelle que nous avons remarquée dans l'intérieur des montagnes granitiques, ſe manifeſte auſſi, par ci par là, dans le gneiſs & le ſchiſte. On y trouve quelquefois des noeuds, des parties & des petites maſſes de granit ou de porphyre ſoudés avec la roche principale. Ces anomalies locales dependent également de quelque alteration particuliere & mechanique des parties en ces endroits, lorsque le gneiſs ou le ſchiſte ſe formoit. Le croit-on formé de la meme maniere dont le granit eſt produit, c'eſt à dire que le gneiſs ou le ſchiſte ſe trouvoient parfaitement liquide au commencement, & que les terres, qui entrent dans leur compoſition, ſe trouvoient en diſſolution plus ou moins complette dans l'eau: les accidents ſurvenus pendant l'opéra-

des

tion, les effets d'une combinaiſon plus promte ou plus lente des terres primitives, ont pû produire ces variations. Il-y-a des agates rayées de pluſieurs couleurs & ſtriées de lignes parralleles, qui forment pluſieurs angles, qui repréſentent la figure d'une fortreſſe (Fortifications Agate); il-y-a des jaſpes polyzones ou rubanés de pluſieurs couleurs (Bänder jaſpis) dont les zones reſemblent à des couches, appliquées l'une à l'autre: mais ces jeux ne dependent point d'une formation ſucceſſive d'une zone aprés l'autre; elles ſont toutes formées en meme tems & n'exiſtent qu'accidentellement, quelle que ſoit la cauſe de leur diviſion apparente. Ce que je viens de dire me paroit ſuffiſant pour expliquer les irrégularités & les nûances des diverſes combinaiſons des parties qu'on rencontre quelquefois dans l'intérieur du gneiſs & du ſchiſte, ſi on lui aſſigne la meme formation que celle du granit. Mais il eſt plus probable que le gneiſs & le ſchiſte tirent leur origine de la décompoſition des roches granitiques, comme nous l'avons remarqué plus haut. Cette décompoſition eſt toujours plus ou moins parfaite & produit du gravier, du ſable ou une réſolution plus argilleuſe & plus complette des parties integrantes de ces roches. L'eau ayant entrainé, melé & agité ces detrimens, les a enfin dépoſés au fond; les plus groſſiers ont été enveloppés & entourés de plus fins, plus pulveriſés, plus argileux; & le ſchiſte s'eſt formé ſucceſſivement par la ſuite de ces depôts. Les noeuds granitiques ou porphyreux, qu'on remarque quelquefois dans l'interieur du ſchiſte, ne ſont donc que des fragmens moins detruits du vieux granit ſoudés les uns contre les autres de maniere, qu'ils reſemblent tantot au porphyre, tantot au granit. Le gneiſs en général eſt compoſé de debris plus groſſiers du granit que le ſchiſte, qui en contient les plus ſubtils, reduits à l'état d'argile, melée de terre ſiliceuſe. Si on connoiſſoit l'ancien état des hauteurs granitiques,

ques, qui exiſtoient avant la formation des ſchiſtes, & la qualité de leurs roches en chaque endroit, on pourroit vraisemblablement indiquer la raiſon, pourquoi certains pays ne contiennent que des montagnes de gneiſs, d'autres uniquement des ſchiſtes.

Il me reſte encore quelques mots à dire ſur les filons granitiques inſerés dans les roches ſchiſteuſes. Ce granit eſt formé des débris des montagnes granitiques plus elevées, qui y ſont amenés par les eaux, & conſolidés & petrifiés depuis, ou peut-être eſt il enlevé au granit primitif, lorsqu'il étoit encore pateux ou peu durci, & rejetté dans les fiſſures ou fentes de la roche ſchiſteuſe. M. de *Sauſſure* a deja donné cette explication fort ſimple. Dans tous les deux cas le granit des filons n'eſt que ſecondaire dans ce ſite, & le ſchiſte eſt naturellement plus ancien que la gangue qu'il contient, ſans qu'il en reſulte la moindre objection contre le rang d'ancienneté plus reculée du granit d'ou ces dèblais derivent. Les bandes porphyreuſes qui traverſent le ſchiſte à Joachimsthal en Bohème 2.) meritent d'être regardées comme des larges filons. Si on aime mieux, on peut auſſi les regarder comme des modifications locales du ſchiſte. L'une ou l'autre explication ne ſouffre point de difficulté aprés ce que nous avons expoſé ci-deſſus.

§. 22. La pâte des roches calcaires n'eſt pas plus homogène dans ſon intérieur, que celle des montagnes granitiques, gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes. Les melanges qu'on y trouve prouvent aſſés que l'eau qui la dépoſoit ou la cryſtalliſoit en certains endroits, étoit chargée d'autres terres encore, outre la ter-

2.) Ferbers Mineralgeſchichte von Böhmen. S. 68.

terre calcaire combinée avec l'acide aërien. Ces terres étrangères ſont plus ou moins intimement melées avec la terre calcaire, & ſervent d'appui à notre théorie de la formation poſtérieure des marbres & autres roches calcaires, à celle des granits & des ſchiſtes. Pluſieurs couches en ſont tellement infectées, qu'elles préſentent une marne argilleuſe, plutot qu'une pierre, & qui eſt hors d'état de ſervir à en bruler de la chaux. D'autres contiennent de la terre ſiliceuſe en telle quantité, que certains auteurs ne les ont plus reconnues, mais en ont voulù faire un nouveau genre de roche. Les marbres mêmes dont les characters extérieurs & l'uſage qu'on en fait, ne laiſſent aucun doute ſur leur nature, & qui ſont beaucoup plus purs, que les couches des Alpes calcaires, dont je viens de parler, ſe trouvent ordinairement melés d'une portion de terre argilleuſe, ſiliceuſe & magneſienne, quelquefois au point qu'ils en deviennent trés durs & donnent des étincelles quand on les frappe avec le briquet. Les analyſes de pluſieurs marbres d'Eſpagne, d'Italie & de la France faites par M. *Bayen* & celles des marbres de Finnlande & de la Sibérie entrepriſes par M. *Georgi* en font foi. Il n'eſt pas rare de trouver des criſtaux de roche dans l'intérieur du marbre de Carrare; & le marbre d'Ena & d'autres Alpes autour de Recoaro, Roſena, Arſiero, Velo, Tretto & Schio dans le Vicentin, qui eſt blanc comme la neige, & ſe trouve en larges filons ou bandes dans le ſchiſte, dans lequel on a anciennement exploité une mine d'argent, contient autant de terre magneſienne, qu'on en peut extraire du ſel amer avec de l'acide vitriolique 3.). Les ophites par exemple le marbre de K Imârden en Suede, le Verd'antico, & la Polzevera di Genova, ſont parſemés de glandes & de taches de ſerpentin. Combien de parties hété-

 ro-

3.) Sammlung einiger mineralogiſch-chymiſcher ꝛc. Abhandlungen des Herrn Arduini und einiger Freunde deſſelben. Dresden 1778. in 8. S. 39 u. 49.

rogénes ne ſe trouvent pas dans les Broccatelles, les marbres breches (brecciati) & les Lumachelles? Ceux qu'on nomme Cipolini, ſont remplis de couches entieres de mica, dont l'épaiſſeur eſt quelquefois trés conſiderable, ſouvent au contraire elle n'excedé pas celle d'une lame de couteau, formant des lignes horizontales dans le marbre, tracées comme à la regle. Cette diſpoſition ne paroit elle pas prouver que les écailles du mica tirent leur origine de montagnes gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes préexiſtantes à la formation de ces marbres? A peine il-y-a-t'il une ſeule carriére de marbre, où l'on ſe puiſſe diſpenſer d'en rejetter pluſieurs couches, parcequ'elles ſont marneuſes, argileuſes ou ſablonneuſes. Il eſt même rare de trouver de gros blocs de marbre exemts de tout mélange étranger & qui gate la couleur, dans les couches les plus pures. Pour s'en convaincre on n'a qu'à viſiter les marbriéres ſur la côte d'Italie entre Genes & Livourne, ou d'en lire la deſcription inſerée dans les voyages de M. *Targioni Tozzetti* par la Toſcane. Le marbre de Puſilowa à 20 Werſt de Schluſſelbourg ſur le Ladoga, contient de l'Acide marin, ſuivant les eſſais de M. *Georgi*, qui les a faits ſur ma demande. On conviendra que tous ces mélanges hétérogènes dans les marbres & dans les differentes couches des alpes calcaires, ne dépendent que de matieres étrangeres, ammenées & introduites pendant la formation de ces maſſes. Elles ſont donc *dans ce ſite* de même ancienneté que toute la couche ou la roche contenante. Mais comment en pourroit on inférer que tout ſable, toute terre argileuſe ou magneſienne qui forme la pâte d'autres montagnes du globe, ſoit de meme date de naiſſance que ces couches calcaires ou de marbre? C'eſt cependant ainſi, qu'on raiſonne, lorsqu'on veut conclûre de quelques maſſes de granit, trouvées dans l'intérieur du ſchiſte & qui y ont été jet-

tées

tées par hasard, que le schiste est de la même ancienneté que le granit.

§. 23. De ce qui est dit dans les §§. précédens, il s'en suit, qu'il-y-a deux manieres differentes de considérer les minéraux, sur tout les roches qui forment la croute de notre globe: ou simplement en minéralogiste, ou en Physicien Géologue. Le premier ne cherche qu'à determiner & bien caracteriser les genres, les éspéces & les variétés des fossiles, à l'aide de la Chymie & des marques exterieures, afin qu'il puisse les distinguer lui-meme & les faire connoitre à ceux qui veulent s'en instruire ou en tirer quelque parti, & il n'a proprement pour objet, que de se mettre au fait de leurs proprietés, de leur usage, & de tout ce qui peut contribuer à leur connoissance individuelle. Le second va plus loin. Il ajoute à la recherche du mineralogiste celle de la distribution, de la disposition, & de la liaison relative des fossiles dans le sein de la terre. Il en tire des conclusions pour dévoiler la construction & la composition materielle de notre globe & dans cette recherche il s'impose la plus grande précaution pour se garantir de l'illusion des faux raisonnemens. Le simple mineralogiste quelque habile qu'il soit, n'est pas en état de faire des découvertes dans ce genre, à moins qu'il ne s'applique en meme tems assidûement aux observations géologiques, & gagne par là l'habitude de bien voir, & de bien entendre ce qu'il voit. Juge-t-il d'aprés les échantillons conservés dans son cabinet, & choisis, comme il convient, dans l'état de la plus grande pureté, & du caractère le mieux exprimé, de la constitution effective des montagnes, il est sujet à se tromper, & se forme souvent des idées absolument fausses. On sait par exemple que le granit est une pierre composée de quartz, de feldspath & de mica, ajoutons de schoerl si on veut. Il est

également connû, que pour former du marbre, la nature n'a beſoin que de terre calcaire, d'acide aërien & d'eau. Mais ſi quelqu'un s'imaginoit que les montagnes de granit ou de marbre ſont par tout de la meme pureté & d'une compoſition auſſi homogéne, que dans les morceaux choiſis exprés pour l'inſtruction, & qu'il a appris à connoitre dans ſon cabinet: il riſqueroit de meconoitre totalement ces roches en certains endroits des Alpes, & il ſeroit tenté de dire peut-être, qu'il n'y a ſur la terre qu'un petit nombre de montagnes de granit ou de marbre. Encore moins ſeroit-il en état de déchiffrer l'ordre qui y règne dans la diſpoſition des roches; car la qualité d'une pierre ne decide pas toujours, ni de ſa place dans les montagnes, ni de ſon âge. On ne s'apperçoit que trop du défaut de pareilles connoiſſances géologiques dans les ouvrages de pluſieurs ſavans qui n'ont pas eu occaſion d'étudier les mines, de voir beaucoup de montagnes, d'y faire frequemment des obſervations, & de comparer un pays avec l'autre. La moindre variation accidentelle d'une roche, ſoit dans la ſituation ou dans la compoſition, les confond au point, qu'ils la deſignent ſouvent par des noms qui ne lui conviennent point du tout & qu'ils tirent de mauvaiſes conſéquences de pareilles obſervations fautives. Je ne ſerois pas embarraſſé d'en trouver pluſieurs exemples; mais je me borne volontiers à ceux qui ont trop de rapport avec l'objet de ce memoire pour pouvoir me diſpenſer d'en parler.

Ayant ſuffiſamment expliqué ci-deſſus, comment les noeuds & les petit s maſſes de porphyre, de gneiſs ou de ſchiſte, qui ſe trouvent quelquefois dans l'interieur des granits, ainſi que les petites maſſes de granit & de porphyre qu'on rencontre dans l'interieur des ſchiſtes, ont pû s'y former par la rencontre des molecules accidentellement derangées

gées de leur liaiſon ou de leur combinaiſon ordinaire; ayant auſſi remarqué, que ces variations locales n'y occupent que des éſpaces infiniment petits, en comparaiſon avec le volume de toute la maſſ de la roche, dont le genre ſe manifeſte ſans aucune équivoque: je demande, ſi la dénomination d'une telle roche ſe doit faire *a potiori*, comme on dit, ou ſi les variations accidentelles, de peu d'étendue, autoriſent à en changer le nom & à le modifier ſelon ces accidents? Je parle ici plutot du rang qu'il faut accorder à une telle roche dans la claſſification des montagnes, que de ſon nom purement minéralogique. Il ſeroit ſans doute ſingulier de nommer du granit ce qui eſt du porphyre ou du ſchiſte; mais la quéſtion eſt proprement: ſi une roche ſchiſteuſe qui contient quelques noeuds de granit ou de porphyre, doit être conſiderée comme appartenant à l'enveloppe ſchiſteuſe ou granitique du globe terreſtre? On voit bien qu'il ne s'agit pas ici des mots ou de la ſimple nomenclature, mais d'un objet eſſentiel de la géographie phyſique. Mettant de coté la conſideration, que de petits noeuds de granit ou de porphyre dans l'intérieur d'une montagne ſchiſteuſe n'y ſont rien moins qu'eſſentiels, & ne changent pas la nature & le phyſique de cette montagne, il ſuffit de ſe rappeller, comment on s'exprime en d'autres occaſions, ſemblables au cas preſent. Lorsqu'on parle des monts de Faſtenberg à Johanngeorgenſtadt en Saxe ou d'Andréasberg au Hartz, dit-on que ce ſont des montagnes d'argent, ou plutot que ce ſont des montagnes ſchiſteuſes qui contiennent des filons de mine d'argent? La réponſe eſt fort facile à donner. Mais voyons comme on s'y prend quelquefois.

§. 24. La roche que M. *de Born* a nomme *Saxum metalliferum*, faute d'autre nom plus convenable & plus diſtin-

ſtinctif, qu'elle merite à tous égards, 4.) contient la plupart des mines d'or & d'argent en Hongrie & en Tranſylvanie. De la deſcription qu'en a donné M. *de Born*, dans ſes lettres à moi ſur la Minéralogie de ces pays, & dans le Catalogue de ſon cabinet, & enfin de ce que j'en dis dans mon ouvrage ſur les mines de hongrie, il eſt connû que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une roche argilleuſe de couleur bleûatre, trés compacte, ou ſans feuilles propres aux ſchiſtes, & qu'elle repoſe ſur le granit, ténant lieu du gneiſs & du ſchiſte qui y eſt adoſſé en d'autres pays. C'eſt donc la bande argilleuſe de ces montagnes, melée de terre ſiliceuſe ou de quartz, comme toute argile, tout ſchiſte d'ancienne formation, quelquefois auſſi d'autres terres hétérogènes. De ces mélanges dépend la vitrification de cette roche au feu, qualité qui pourroit porter à la ranger avec le Trapp. En quelques endroits cette roche eſt trés dure & contient des taches ou criſtaux de feldſpath & de ſchoerl; en un mot, elle approche alors du porphyre, & pourroit mériter ce nom, en de tels endroits, s'il n'étoit queſtion que de la claſſification minéralogique. Mais il s'en faut de beaucoup que tout le *ſaxum metalliferum* ſoit porphyreux. Il ne l'eſt qu'en peu d'endroits; & ces portions ſont infiniment petites en les comparant avec le volume prodigieux du reſte vraiment argilleux. Expoſée à l'air cette roche manifeſte clairement ſon genre, y tombant facilement en defaillance. Neaumoins quelques auteurs qui apparament n'ont reçu que quelques morceaux mal choiſis de cette roche, ont jugé d'après ces échantillons, & l'ont rangée parmi les porphyres; erreur qui

4.) M. Haidinger voulant donner un nom allemand à cette eſpéce de roche, l'a nommé Grauſtein. Elle n'eſt pas toujours de couleur griſe, mais plus ſouvent bleûatre. Outre cela il en pourroit reſulter quelque confuſion de ce nom, parceque ce qu'on entend par Grauſtein en Suede (Groſten, Groberg) c'eſt du granit gris.

qui ne tire pas à grande conſéquence dans la minéralogie, mais qui n'eſt pas indifférente pour la connoiſſance phyſique du globe. M. *Hacquet* prononce 5.) que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une lave, & croit avoir découvert, que les mines d'or de Nagy-ag en Tranſylvanie ſont exploitées dans un ancien crater volcanique; mais laiſſons lui ſes viſions & ne nous y arrêtons pas.

Feu M. *Mojſienkow*, auteur d'un traité ſur les mines d'étain, a publié des idées ſur les roches, qui contiennent les mines d'Altenberg en Saxe, & de Zinnwald en Bohême, contraires aux obſervations faites ſur les lieux, tant par M. *Charpentier* que par moi même. M. *Charpentier* 6.) eſt d'accord avec moi 7.) que l'amas d'étain eſt dans du granit à Altenberg; mais M. *Mojſienkow* donne cette roche pour du Porphyre 8.). Le motif qui l'a engagé à choiſir ce nom, n'eſt qu'une alteration ou variation locale du rocher, de même genre que ſont les noeuds & les amas dont nous avons deja parlé. M. *Charpentier* remarque (p. 150.) que ce granit reſſemble en certains endroits au porphyre, mais la deſcription qu'il en donne (p. 163. XXVI.) fait bien voir que ce porphyre ne l'eſt pas en effet. Il n'eſt qu'une variété du granit qui contient des criſtanx reguliers de quartz, telle que je l'ai decrite dans l'ouvrage cité note 7, p. 124. M. *Charpentier* convient encore avec moi (V. ſa Geographie miner. p. 164 & mes mémoires ſur les mines de la Bohême p. 132.) que les mines d'étain à Zinnwald ſont ſituées dans le granit, & que les bancs ou

5.) V. le journal de Phyſique 1785 janvier
6.) Mineralogiſche Geographie der Churſächſiſchen Lande. S. 149. 150. 153. 159.
7.) Ferbers neue Beyträge zur Mineralgeſchichte verſchiedener Länder. 1. Band.
8.) Mojſienkow Abhandlung von Zinnſtein. S. 63.

ou lits de cette roche, qui environnent les filons du minerai, ſont des variétés de ce granit; mais M. *Mojſienkow* (p. 74, 75.) prétend que les filons ou couches d'Étain repoſent ſur du granit & ſont couverts de porphyre. Ce porphyre n'eſt pourtant nommé ainſi qu'à cauſe de la reſſemblance extérieure qu'il montre avec le vrai porphyre par ſes taches blanches ſur un fond rouge; ſans faire attention à la qualité des parties; car le vrai porphyre a du Jaſpe pour baſe, & ſes taches ſont de feldſpath: celui-ci eſt compoſé d'une terre molle argileuſe & de grains de quartz 9.). Ce n'eſt donc pas de vrai porphyre ni même dans le ſens purement minéralogique, mais une varieté du granit, comme j'ai dit, & comme l'auteur d'une nouvelle deſcription des mines de Zinnwald 10.) le confirme encore, en expliquant leur origine d'une manière trés plauſible & conforme aux modifications ordinaires de telles roches. On voit par là, quelle incertitude & quelle confuſion de pareilles obſervations peu exactes jettent dans nos connoiſſances ſur la compoſition du globe, ſi on reçoit toutes celles qu'on publie de toutes parts, avec la même confiance, ſans aucun examen ſcrupuleux. La nature reſte fidéle à ſes principes lorsqu'elle agit en grand; c'eſt à nous de les ſaiſir & de ne pas croire qu'elle s'en eſt écartée, au premier petit objet qui nous ſemble extraordinaire, ſi nous ne l'examinons pas comme il faut. Au reſte je ne veux pas abſolument nier, qu'on ne puiſſe trouver de vrai porphyre dans l'intérieur d'une montagne granitique, ou pour mieux dire, qu'il n'y ait des montagnes granitiques dont quelques parties, quelques noeuds ou petites maſſes puſſent être compoſées de vrai porphyre. On ſait que les granits contiennent ſouvent des parties, des veines ou des maſſes

9.) Charpientier Mineral. Geographie. ꝛc. S. 150 und 163. XXVI.

10.) Magazin der Bergbaukunde, 1ſter Theil. Dresden 1785, in 8. S. 102.

ſes argileuſes & bolaires. Il ſuffit que quelques debris de feldſpath tombent & ſe diſperſent dans ce bol & qu'il ſe durciſſe, ou ſubiſſe la lapidification dez-lors, voilà le porphyre formé. De la même maniere, il ſe peut former du porphyre dans l'intérieur des montagnes gneiſſeuſes, ſchiſteuſes ou argileuſes par exemple dans la roche metalliférе de hongrie, dans le ſchiſte en Bohême 11.) &c. Les montagnes gneiſſeuſes contiennent abondamment le feldſpath qui fait une partie integrante de cette roche. Les montagnes ſchiſteuſes ſont formées de debris des roches granitiques, ou peut-ètre en partie des roches gneiſſeuſes par une ſeconde deſtruction. On conçoit donc facilement que quelques parties du feldſpath ont pû échapper à la detrition & à la reſolution que les autres parties ont éprouvée & ont pu s'enclaver dans la maſſe boueuſe. Veut-on expliquer la formation de ces montagnes de telle autre manière, qu'on jugera la plus probable, perſonne ne diſputera à la nature la faculté de produire du feldſpath ou quelque autre pierre toutes les fois que les terres & les moyens neceſſaires ſe trouvent reunis par haſard, dans la proportion requiſe. Or les roches argilleuſes ne ſont pas dépourvues de ces matières. Elles ont été dans un état de fluidité, ou au moins dans celui d'un mélange liquide. Il-y-a des fentes, des filons, qui font infiltrer l'eau en pluſieurs endroits. Cette eau entraine avec elle pluſieurs molecules terreuſes & les dépoſe où les circonſtances le permettent. Il s'y peut donc former toute ſorte de pierre, & auſſi du feldſpath, ſi les circonſtances y contribuent, ſi les terres neceſſaires ſe trouvent dans un état de ſolution moyennant quelque acide, & ſi la cryſtalliſation peut avoir lieu. Que cette opération ne repugne pas aux forces actuelles de la nature, mais au contraire qu'elle

 puiſſe

11.) Ferbers Mineralgeſchichte von Böhmen. S. 68 und 124.

puiſſe s'effectuer & agir encore aujourd'hui dans l'interieur, dans les fentes & dans les interſtices de roches, cela eſt connù & trés bien demontré par les cryſtalliſations calcaires, quartzeuſes & méme metalliques, qui ſe forment en partie ſous nos yeux ou qui portent des marques évidentes d'une formation recente 12.). Concluons donc, que l'identité des parties conſtituantes ou integrantes de deux roches de même genre ou éſpece, ſuivant la claſſification mineralogique, ne décide rien de leur formation contemporaine ou ſimultanée. Il-y-a des ſchiſtes, des roches calcaires, des quartz, des feldſpaths &c. &c. probablement auſſi des granits, de differents âges. Le phyſicien géologue doit diſtribuer les roches de même genre, éſpece ou varieté, en pluſieurs claſſes d'ancienneté relative, à meſure qu'il fait des découvertes qui l'éclairent ſur cet objet, tandis que le ſimple minéralogiſte auroit tort de ſéparer des minéraux, qui conviennent en compoſition, ſoit chymique ou mechanique, lorsque c'eſt celle-ci qui decide de leur place dans le ſyſteme, comme c'eſt le cas des roches mélangées.

12.) On croit avoir trouvé des criſtaux de Quartz encore moux ou gelatineux, On trouve des ſtalactites calcaires dans les mines, ſur lesquelles des criſtaux quartzeux ou metalliques ſe ſont formées depuis.

DE

DE ORDINE FIBRARVM CORDIS.

Dissertatio VI.

QVAE REPETITAS ET NOVAS OBSERVATIONES DE FIBRIS VENTRICVLORVM EXTERNIS CONTINET.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 22 Iun. 1786.

Pars Prior.

VENTRICVLVS DEXTER.

Cur obseruationibus repetitis in cognoscenda fabrica cordis opus sit.

Vti in partibus corporis fere reliquis omnibus; vti in ipsa cordis figura et fabrica; sic in fibris quoque earumque dispositione, haud raro, nec minus insignes, varietates occurrunt. Hae vero nonnisi phoenomena sunt, apparentia forte aliquoties postea, aut semel, forte nunquam, quae minus confundere oportet cum solita et constanti structura, quae sola tanquam vera et naturalis considerari debet. Vt ergo, an vere sit constans, quae talis in primo corde videbatur, certo constet, operae pretium esse duxi, in pluribus corporibus has fi-

bras non modo inquirere, earumque notare et tradere differentias, ſed iconibus quoque illas, eadem diligentia et fide factis, repraeſentare, qua primum harum fibrarum exemplar tradidi. Hoc eo magis conſultum mihi viſum eſt de eo, quod nunc trado, corde, cum in eodem externas non modo, quas hactenus ex vno corde exhibui, ſed medias quoque omnes, earumque in ſiniſtro ventriculo varia ſtrata, et ſepti fibras, a mediis continuatas, inquiſiuerim, in tredecimque iconibus notauerim; quod fieri omnino oportet, vt, qua ratione ſe fibrae in variis ſtratis erga ſe mutuo habeant, accuratius intelligatur. In hoc ergo imprimis nouo corde, quaenam ex hactenus deſcriptis eaedem reperiantur ſingulares aut notabiles ſtructurae, et quae ergo verae ſint et naturales; quae contra aut plane non inueniantur, aut alio ac diuerſo modo ſtructa, iudicabo primum, et conferam, quae in aliis viderim cordibus; quae noua vero inuenerim, ſuis locis addam. Deinde fibras medias in ſequentibus diſſertationibus exponam.

Partes et regiones cordis nudi pluribus obſeruationibus confirmatae: conus arterioſus, infundibulum, angulus cordis dexter et pars baſilaris.

Partes et regiones cordis nudi propriae, et diuerſae ab iis, quae in corde obſeruantur, membrana et adipe obducto, conus ſcilicet arterioſus *a*), infundibulum ventriculi dextri *b*), angulus cordis *c*), pars baſilaris ventriculi dextri *d*), ſingulae ſicut in primo corde, cuius deſcriptionem hactenus tradidi, repertae ſunt. Conus imprimis arterioſus figura et magni-

a) Tab. I. J. 14. C L. Tab. IV. F. G. C. D.
b) Tab. I. G. H. I. C. Tab. IV. F. L. C. M.
c) Tab. I. G. M. 25. Tab. IV. . L. N. I.
d) Tab. I. O. Tab. IV. V. Tab. II. L. H. 16. 17. *k*. Tab. V. 12. 15. 8. 19. 20.

gnitudine non ſo'um, quemadmodum in prima deſcriptione, eum in aliis cordibus repertum eſſe, monueram, multo quam in primo corde ſpecioſiorem in nouo hoc corde, ſed fabrica quoque et ſtructura tam pulchrum, ſe praebuit, vt peculiarem cordis partem eum eſſe, notatu maxime dignam, multo luculentius nunc appareat. Explicabo autem eam ſtructuram peculiarem vbi de fibris circumflexis ſiniſtris agendum erit.

Aliae quaedam partes eiusdem addendae: Angulus cordis ſiniſter, apex ventriculi ſiniſtri, partes eiusdem arterioſa et venoſa.

Pauca modo iis, quae de partibus cordis nudi in prima diſſertatione dixi, addenda ſunt. *Angulus cordis ſiniſter*, aut *pars gibboſa ventriculi ſiniſtri a)*, haud minus notari meretur, quam angulus dexter, et *pars arterioſa* quoque a *venoſa* in ſiniſtro aeque, atque in dextro eam diſtinxeram, ventriculo diſtinguenda eſt. Diſtinguit autem eas partes linea diagonalis, quae a fine fili cartilaginei anterioris ſiniſtri *b)*, conformis directioni fibrarum, oblique ſiniſtrorſum ad marginem ducta, *c)* in inferiorem porro ſuperficiem tranſit *d)*, eamque percurrit *e)*, terminalemque faſciculum inferiorem prope eius principium ſecando *f)* in vallecula tandem finitur *g)*; eaque ratione ventriculum in duas partes obliquas diuidit, alteram ſuperiorem *h)*, poſterius ad baſin anguſtiorem *i)*, vbi angulum totum

a) Tab. I. *w.* 59. 62. Tab. IV. *p.* Q 50.
b) Tab. IV. *p.*
c) Tab. IV. 50. 54.
d) Tab. VI. 14. 15.
e) Tab. VI. 65. 55. 68.
f) Tab. VI. 6.
g) Tab. VI. 8. 101.
h) Tab. IV. *p.* C. K. E. T. R. 54. 52. Tab. VI. 15. 65. 68. 10. 119. 15.
i) Tab. IV, 52. 60.

tum *a*) excludit, partique addit inferiori, latiorem anterius ad apicem *b*), vbi apicem includit totum, inferiorique aufert parti *c*); alteram inferiorem *d*), latiorem poſterius ad baſin, vbi angulum includit totum, aufertque ſuperiori parti *e*), anterius verſus apicem anguſtiorem *f*), vbi apicem totum excludit *g*), partique ſuperiori addit. Superior pars ventriculi *arterioſa*, inferior *venoſa*, eſt. Et patet, venoſam fibras complectere omnes ordinis primi, et, quas in ſequentibus dicam, primas fibras ſiue funiculos ordinis ſecundi, arterioſam contra reliquis tectam funibus eſſe et fibris omnibus ordinis tertii et quarti. Plura de his partibus ventriculi in diſſertatione V^ta^ de actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri dicta ſunt, vbi cauſa ſimul patet, cur neceſſe ſit, vt accuratius illae definiantur. Denique apicem quoque ventriculi ſiniſtri notare oportet, *h*) remotum a ſinibus crenae et ſtriae, inter duas diſtinctas partes marginis contentum, quarum alteram, maiorem, *ſiniſtrum i*), alteram, minorem, *anteriorem marginem k*) dicas, et de quibus, vti et de apice, pariter in ſequentibus agetur.

Fila cartilaginea confirmata.

Fila cartilaginea, inter cordis et ſinuum baſes contenta, easque diſtinguentia, recte vbique reperi quidem, at nusquam tamen tam magna et pulchre formata, quam in primo corde. Neque

---

a) Tab. IV. *p.* Q. 50.
b) Tab. IV. 98. T. Tab. VI. 8. 80. 25.
c) Tab. IV. E. T. 74. 74. Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 22.
d) Tab. V. F. C. 4. 55. 65. 14. 13. Tab. IV. 50. *p.* Q.
e) Tab. VI. 5. F. 13. Tab. IV. Q. P.
f) Tab. VI. 53.
g) Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 24.
h) Tab. IV. T. Tab. VI. 80.
i) Tab. IV. Q. T. Tab. VI. 13. 80.
k) Tab. IV. T. E. Tab. VI. 4. 80.

Neque cartilagineum filum ipſum a vaginula celluloſa, qua tegitur, in poſterioribus periculis diſtinguere potui. Imo in ipſo hoc corde anterius dextrum filum valde obſcurum erat, vt vix cognoſceretur *a*) ſiniſtrum tamen *b*) et poſteriora *c*), ſatis manifeſta apparuerunt. Conſtantia eſſe, nullum dubium eſt. Raro tamen tam pulchra eorum ſtructura, quam in primo corde, reperiri videtur.

Differentia inter fibras externas ventriculi dextri et ſiniſtri confirmata.

Planis et latioribus *faſciis* exterius dextrum ventriculum, *d*) ſiniſtrum *funiculis* ramificatis et fibris tectum eſſe teretibus *e*), omnino certum eſſe videtur, cum in nullo non corde hanc fibrarum diſpoſitionem poſtea inuenerim. Nec minus conſtans eſt, *latas* magnas *fibras* in ſuperiori, aut baſi propiore, parte ventriculi dextri, et in faſciis, quae eam efficiunt *f*), manifeſto *tenues* contra in parte ventrali et apice, inuenire *g*); ex quo ſolo argumento videas, quam parum Auctores, qui omnes has fibras per vniuerſam cordis ſuperficiem aequales ſimilesque rectilineas pingere ſolent, aut attente eas conſideraverint, aut viderint vnquam. Nam ſane quaedam loca tantum in cordis ſuperficie exploraſſe videntur, ex quorum fibris conditionem omnium fibrarum concluſerint. Neque ad quidquam aliud, niſi ad directionem fibrarum, attenti fuerunt.

Con-

---

a) Tab. IV. *o.*
b) Tab. IV. *p.* Tab. V. *g.*
c) Tab. VI. F. N.
d) Tab. I. J. K. G. M. 32. 36. 39. 43. 50 etc. Tab. IV. F. G. L. N. 30. 34. 35. 36. 37. etc.
e) Tab. I. 70. 71. 72. 73. 93. 95. 98. 100 etc. Tab. IV. 52. 54. 55. 77. 78. 82. 97. etc.
f) Tab. I. J. K. G. M. L. 3. 10. 27. 28. Tab. IV. F J. N. C. D. K.
g) Tab. I. M. H. F. Tab. IV. N. K. P.

Confirmata complicatio fibrarum cordis, variaeque nexuum ſpecies.

Haud minus *nexum* ſingularum fibrarum faſciarumque et faſciculorum, quos illae collectae efficiunt, conſtantem eſſe reperi. Extremitatibus ſuis faſcias inter ſe mutuo, idque variis modis, ſerratim, aut pennatim, aut obſcuriori continuationis interruptione *a*), aut obliqua demum aliarum in alias inſertione *b*), connexas inuenire, vti in primo, ſic et in reliquis, quae hactenus inquiſiui, cordibus, et in eo, cuius hic iconem adiungo, ſolitum eſt. Faſciculi conſtanter, vti ramificati, ſic anaſtomoſibus quoque coniuncti reperiuntur *c*). Tum et per latera fibrarum faſciae et faſciculi, imprimis per fibrillas obliquas nectentes, conſtanter inter ſe coniuncti ſunt. *d*) Imo et nouo genere fibrillarum faſciculos, ſiue funes, in hoc et in aliis cordibus connexas eſſe vidi. Solis enim profundioribus fibrillis obliquis faſciculi in corde priori coniuncti *e*) inveniebantur. Superficialibus, manifeſto ex altero in alterum funem continuatis, egregiis, robuſtis, fibrillis breuibus eos connexos in hoc corde reperi *f*); et in aliis ſedibus fibrillae nectentes quaſi in funiculos, breues quidem, at ſatis craſſos, collectae erant *g*). Neque vllo modo in repetitis his periculis dubioſum cuiquam eſſe poſſe videbatur, quin carneae illae fibrillae nectentes ſint, quae tanta craſſitie et magnitudine *h*) reperiuntur. Inordinata coalitione quoque in multis ſedibus, im-

a) Tab. IV. 68. 66. 69.
b) Tab. IV. 25. 27. 29. 30. 33. 34.
c) Tab. I. 72 76. Tab. V. 33. 35. 30. 38.
d) Tab. I. 14. 15. 16. 18. 68. 74. Tab. IV. 17. 18. 21. 24. 69. 72. Tab. V. 37. 40. 41. 46. Tab. III. 20. 20. 21. 37. 43. Tab. VI. 31. 61. 65. 17. 20. 23.
e) Tab. I. 65. 68. 74. 77.
f) Tab. V. 41.
g) Tab. V. 47.
h) Tab. I. 77. Tab. V. 47.

imprimis in iis ipsis, quas in descriptione prima citaueram *a*) fibras connexas esse reperi.

Ortus progressus insertio fibrarum ventriculi dextri confirmati.

Nihil dico de ortu, progressu et insertione fibrarum ventriculi dextri in vniuersum, neque de limitibus huius ventriculi, in tertia dissertatione determinatis. In iis enim reliquae structurae fundamentis haud magis natura, quam in situ cordis, aut in figura, aut in partibus eius primariis, variat.

Crena confirmata.

Crenam etiam simili modo, vt in primo corde, sic in hoc et in caeteris reperi, nisi vt frequentius fibrae ex dextro in sinistrum ventriculum continuarent. Sedes vero, figura, ductus, vbique eadem *b*); vt ex latere coni sinistro primo sinistrorsum *c*), hinc porro dextrorsum *d*), post iterum sinistrorsum, inclinando *e*), ad finem progrediatur.

Et stria.

Similiter et *striam* in caeteris, sic vt in hoc praesenti corde, reperi, modo vt saepius, velut in hocce, haud prorsus ad apicem cordis vsque peruenerit, sed citius, dissoluta in fibras, continuatas in ventriculum dextrum, cessauerit. Separatis fibris in hoc corde *f*), venarum instar transuersalibus ramis *g*) frequenter coniunctis, a principiis, sicut in primo cor-

a) Tab. I. 29. etc. Tab. IV. 14. 16. 17. 79. 73.
b) Tab. IV. C. D. H. M. E Tab. I. C. 89. H. D.
c) Tab. IV. C. D. H. Tab. I. C. 89.
d) Tab. IV H. M. Tab. I. 89 H.
e) Tab. IV. M E. Tab. I. H. D.
f) Tab. VI. *e. e. k. r. s. y.*
g) Tab. VI, *t. p.*

de *a*), filorum cartilagineorum poſteriorum oritur. Format progrediendo inſulas notabiliores, profundiori fibrarum ſtrato repletas *b*). Dat latere dextro deinde fibras ventriculi dextri ventrales *c*). Recipit ſiniſtro fibras ventriculi ſiniſtri *d*). Dum eas recipit, aliae, praecipue primae, continuant in ſtriam *e*), exacte in hoc vti in priori *f*) corde, aliae, imprimis vltimae, ad ſtriam ſe applicant, videnturque ſub fibras ſubtiliores eius in profundiores continuare pariter in vtroque corde *g*) Dum edit fibras ventriculi dextri ſtria, aliae ex ſublimioribus eius fibris continuantur *h*) aliae ſub illis prodeunt, continuatae ex profundioribus *i*). Finitur tandem cauda equina, citius quam in primo corde dextrorſum effuſa *k*).

Striae variationes.

Haud pari conſtantia tamen ſtria cum crena aliisque cordis ſtructuris exiſtit. Nimirum perfectior in aliis cordibus, vt in priori, longiorque, et ad finem vsque ſuperficiei inferioris producta eſt, in aliis imperfectior, brevior, citius in fibras reſoluta euaneſcit, vti in hoc corde. In aliquo feminae corde paruo, vix quartam partem longitudinis ſuperficiei fibrae, a principiis filorum ortae, apicem verſus continuabant, quin diſperſae ceſſarent. Reliquam partem longitudinis ſuperficiei aliqua vmbra tamen ſtriae occupabat. Fibrae enim ventriculi

a) Tab. VI. *b. c. d.* Tab. III. 4. 6. 7. 53.
b) Tab. VI. *n. n. q. v.*
c) Tab. VI. 89. 90. 91. 92. 93. Tab. III. 54. 61. 63. 68.
d) Tab. VI. 32. 35. 39. 41. Tab. III. 9. 11. 13. 16. 25.
e) Tab. VI. *y.* 30. 32. 35. 36.
f) Tab. III. 6. 8. 9. 9. 11.
g) Tab. VI. 39. 40. 41. Tab. III. 13. 20. 21. 16.
h) Tab. VI. *g. l.* 93. Tab. III 60. 65 67.
i) Tab. VI. 91. 92. Tab. III. 54. 60. 61. 68.
k) Tab. VI. *m. x.* 3. 1. Tab. III. 70. 72. 75.

triculi ſiniſtri ad marginem ſiniſtrum vsque huius ſtriae productae fecebantur antrorſum, quaſi in ſtriam continuaturae. mox vero iterum flexae ad marginem tranſiebant dextrum, vbi flexae denuo continuabant in fibras ventriculi dextri, incluſa inter duas flexiones parte ſui ſtriae ſpeciem efficiendo, plus quam ſemipollicem latam. Neque tamen ad finem ſuperficiei vsque haec ſtria quoque continuabat; cum aliquod ſpatium ad apicem relinqueret, quo tranſitus liber fibris patebat quatuor vel quinque, recta ex ſiniſtro ventriculo in dextrum continuatis. Atque idem etiam in veriori huius cordis ſtria accidit, quae ceſſando prope apicem duas fibras ventriculi ſiniſtri *a)* in dextrum continuare ſinit.

Raphe non confirmata.

Sola fere *raphe*, quam in ſuperiori ventriculi dextri ſuperficie obſeruaueram, haud confirmata inuenta eſt. Videtur partim impreſſione arteriae coronariae dextrae, partim etiam fortuitis fibrarum interruptionibus, in eo corde formata fuiſſe. Quum arteria ero vario frequenter ductu procreditur; interruptiones fibrarum deſunt; factum eſt, vt aut alia prorſus, aut nulla omnino, raphe in cordibus, quae poſt haec inquiſiui, inueniretur. Raphe ergo omnino ex numero notabilium cordis excludenda eſſe videtur.

Faſciae ventriculi dextri confirmatae.

At tanto maiori conſtantia in varias illas portiones, ſeu *faſcias*, fibras ventriculi dextri externas, directione non modo, ſed etiam ortu et fine, et vſu, et natura, determinatas, quas obſeruare ne in mentem quidem Auctoribus venerat, diuiſas reperi. Equidem magis in aliis cordibus quaedam earum, in

a) Tab. VI. 44. 45.

aliis minus, insignes apparuerunt, quaedam paulo aliter etiam, quam in primo corde, formatae fuerunt; semper tamen easdem portiones distinctas, ortuque et fine et vsu similes, reperi. Et, si quaedam minus insignes in aliis cordibus; tanto eaedem in aliis eminentiores quoque singulari sua structura, insignioresque multo, quam in primo corde, apparuerunt, sicuti exempla in hoc corde repraesentato habemus. Vt facile videas, non phaenomena fortuita, sed vera instituta naturae, has structuras esse. Sic enim cum varietatibus hisce comparatum est, vt aliis certae singulares structurae vix recognoscantur, aliis mire confirmentur.

Circumflexus sinister et conus arteriosus.

Ad haec posteriora exempla maxime *circumflexus sinister* in hoc corde pertinet, et *conus arteriosus*, cuius latus sinistrum ille efficit. Hic paucis, vix tribus vel quatuor, fibris breuissimis in priori corde constat *a*). Neque aliquid singulare hunc musculum esse credidissem, nisi in alio iam corde insigniorem, pluribusque constantem fibris, inflexis, et profundius in crenam insertis, vidissem, quo se manifesto a sequentibus fibris pulmonalibus, quae planae recta in pontem transeunt, distingueret. Ea in hoc corde huius musculi structura est, vt nemo non pro peculiari musculo eum habuerit. Fibrae satis crassae *b*), a parte fere dimidia basis arteriae pulmonalis ortae, oblique ad marginem coni sinistrum transeunt *c*), pollicem fere latae. In nullam ibi crenam inseruntur, sed flexae omnino circa marginem huius coni in superficiem eius posteriorem transeunt *d*), continuantque in eadem, continuo oblique dextror-

a) Tab. I. *x*. C. L.
b) Tab. IV. *t*. *s*. C.
c) Tab. IV. C. D.
d) Tab. V. *x*. *z*. 1.

dextrorſum antrorſum deſcendendo, vsque in baſin coni *a*), adeo vt totus conus, magnitudine ſatis ſpectabilis *b*), vna cum arteria pulmonali a corde eleuari, et recta, non oblique vt in priori corde, antrorſum verſus apicem reflecti poſſit. In dicta ſuperficie coni poſteriori primae fibrae, ſiniſterius a baſi arteriae ortae, *c*) quae in ſuperficie anteriori breuiſſimae ſunt, longiores decurrunt *d*); dexteriores contra, longioresque in anteriori coni ſuperficie *e*), breuiores in poſteriori ſunt *f*); vt ſiniſteriores maximam ſui partem in poſteriori, dexteriores in anteriori ſuperficie, habeant. Praeter eas, quae in anteriori ſuperficie a baſi arteriae pulmonalis oriuntur, aliae etiam, in hac ſuperficie non apparentes, in poſteriori a baſi arteriae pulmonalis ortae *g*), in hac ſola decurrunt, et in ipſum parietem poſteriorem *h*) inſeruntur. Vbi eiusmodi circumflexus ſiniſter datur, dimidia pars coni ſiniſtra actione eius et conſtringitur latitudinis reſpectu, et ſecundum longitudinem quoque contrahitur his fibris obliquis, a baſi arteriae pulmonalis ad baſin coni deſcendentibus, ſimulque circa conum volutis, et baſis arteriae pulmonalis, arteriaque ipſa, pulſo ex dextro ventriculo ſanguini obuiam retractae ducuntur eundemque recipiunt. Quamuis omnino rariorem hanc fabricam eſſe crediderim, qua pars notabilis ventriculi dextri, ſeparata a ſiniſtro, ſepto incumbit, ſiniſterque pariter magna parte liber a dextro, pariete dextro gaudet, qui ſeptum eſt, aut continuatio ſepti; tamen hanc perfectiorem ſtructuram eſſe arbitror, et nor-

a) Tab. V. 51.
b) Tab. IV. F. G. C. D.
c) Tab. IV. C *s*.
d) Tab. V. *x*. 54. 52. 53.
e) Tab. IV. *s*. *t*. D.
f) Tab. V. 54. *z*. 51. *z*.
g) Tab. V. *x*. *y*
h) Tab. V. 1. 53.

normam, quam in minus perfectis natura imitatur. Caeterum inſertas quidem ſemper in crenam in cordibus aliis circumflexi ſiniſtri fibras, at musculum ipſum tamen, proinde et conum arterioſum, maiorem, magisque longe ſpectabilem, quam in primo corde, inueni.

Fibrae pulmonales anteriores.

Fibrae pulmonales anteriores, ortae a baſi arteriae pulmonalis, tranſeuntes in ponte recta ſuper crenam, *a)* eoque a circumflexis ſiniſtris diſtinctae, conſtanter repertae ſunt, modo vt non pennatim aliae earum in alias inſererentur, veluti in primo corde, ſed parallelae ſingulae inter ſe, vt fibrae musculares ſolent, progrederentur. Duae inſignes fibrae latae in hoc corde *b)*, a media parte anteriori baſis arteriae pulmonalis ortae, quas facile, comparatas cum corde primo, pro fibris iisdem recognoueris, hunc musculum efficiunt.

Circumflexus dexter ſuperior.

Circumflexus dexter ſuperior, vel *pulmonalis poſterior* haud minus conſtans repertus eſt. Mirae quidem muſculorum baſilarium generatim, imprimis qui coni arterioſi poſteriorem ſuperficiem tegunt, varietates in hoc corde occurrunt, ſicuti Tabula V. cum ſecunda comparata docet, ſed mire quoque conuenire hos musculos cum iis, quos ex primo corde tradidi, in aliis cordibus vidi. Et ipſa, quae in hoc corde omnium maxime aberrat, ſtructura non eo tamen vsque aliena eſt, quin quilibet musculus facile cognoscatur. Circumflexus dexter ſuperior

---

a) Tab. I. y. 1. 2. z. 3. Tab. IV. t. v. 66.

b) Tab. IV. t. v. w. x.

perior *a*), ſicut in corde primo *b*), duabus ſuis portionibus, longiori *c*) et breuiori *d*), conſtat. Illa a baſi arteriae pulmonalis, velut in primo corde, in poſteriori coni ſuperficie oritur, flectiturque circa marginem baſilarem, et prodit in ſuperficiem ſuperiorem. Haec vero breuior portio haud tota, ſicut in illo corde, ad aorticum minorem ſe applicat, ſed pars eius *e*), adiuncta portioni longae, cum ea in ſuperiorem ſuperficiem tranſit. Deinde ſingularis portio muscularis in hoc corde ad ſuperficiem poſteriorem coni arterioſi datur *f*) quae dubium, vtrum ad pulmonalem poſteriorem, an potius, vti veriſimile eſt, ad aorticum minorem ſit referenda. Haec vna cum prioribus portionibus in ſuperficiem ſuperiorem progreditur. Huc productae variae hae portiones *g*), non ſurſum oblique redeuntes ad pulmonales anteriores fibras ſe applicant, velut in corde primo *h*) ſed videntur potius continuare *i*) in eas, quas interiectas dixi *k*). Tamen aliqua alicuius interruptionis veſtigia in ea ſede, vbi in primo corde circumflexi finiuntur *l*) appa-

---

a) Tab. V. 2. 1. 53. 51. 6. 7. 8.
b) Tab. II. 10. 9. 14.
c) Tab. V. 1. 2. 4. 5. Tab. II. 11. 9. 14.
d) Tab. V. 1. 6. 7. 8. Tab. II. 10.
e) Tab. V. 8.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. IV. F. *y*.
h) Tab. I. 4. 5.
i) Tab. IV. 2.
k) Tab. IV. 2. 5. 4 5. Tab. I. 7.
l) Tab. I. 4. 5.

apparent *a*), et in aliis cordibus diſtinctiorem quoque impreſſionem, haud adeo manifeſtum tamen diſcrimen, quam in primo corde, reperi, vt diſtincte circumflexorum fibrae omnes in vltimam pulmonalium anteriorum inſertae eſſent.

Et inferior.

Circumflexus dexter inferior, ſiue *aorticus*, ſimillimus ei, quem ex primo corde *b*) pinxi, tam in hoc *c*) quam in reliquis cordibus repertus eſt. Ortus a latere dextro baſis aortae, diuiſus in duas portiones, ſeu musculos, aorticum minorem *d*) et maiorem *e*), ſuper marginem baſilarem tranſit, in vtroque hoc corde vti in caeteris, quae vidi, omnibus; modo vt portio ſingularis, cuius mentionem iam feci, in hoc corde *f*) minori accedat, cuius fibrae continuatae vna cum fibris portionis maioris, ſicut in primo corde *g*), ſuper marginem baſilarem progrediuntur *h*). In aliis cordibus neque haec quidem portio acceſſoria apparuit; vt in ſingulis conditionibus totus aorticus illi cordis primi ſimillimus eſſet. Hoc tamen frequentius reperi, vt, etiamſi ſuperior ad pulmonales anteriores in ſuperiori ſuperficie ſe applicaret, quemadmodum aliquae eius fibrae etiam in hoc corde ſe applicant, inferior tamen interrupta continuatione in interiectas potius tranſiret. Corrigenda ergo in deſcriptione circumflexi inferioris inſertio eius omnino videtur

a) Tab. IV. 2.
b) Tab. I. II. 12. 15. 16.
c) Tab. V. 14. 15. 16. 17. 18.
d) Tab. II. 12. Tab. V. 14.
e) Tab. II. 15. 15. 16. 16. Tab. V. 15. 16. 17. 18.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. II. 14.
h) Tab. V. 18.

tur esse, qua scilicet non ad pulmonales se applicet is musculus, sed potius in interiectas transeat.

Haud satis constantes fibrae interiectae.

Verum quas *interiectas* dixi fibras, hae minime satis se confirmarunt. *a*) Credideram, fore constanter, vt circumflexi dextri oblique sursum redeundo ad pulmonales se applicarent anteriores, quo spatium inter pulmonales, circumflexas, et fasciam infundibuli, oriretur, quod completum fibris, a circumflexis diuersis, necessario interiectas repraesentaret. Verum haec res me fefellit. Parallelae in hoc corde fibrae circumflexorum, dum super marginem basilarem transeunt *b*), pulmonalibus et fasciae infundibuli progrediuntur, eaque ratione in fibras continuant, quae sedem occupant interiectarum *c*), sed minus a circumflexis distinctae sunt, minusque differunt a vicinis, vt tanquam singulares fibrae considerari possent. Si omnino continuarent, circumflexae essent ipsae, non ad pulmonales applicatae, sed in pontem transeuntes. Verum, est aliqua obscura continuationis interruptio in ea sede, vbi circumflexi finiri et interiectae incipere solent *d*); et primae fibrae, vel duae, ad pulmonales omnino se applicant; et datur fibra in hoc corde *e*) singularis, ex circumflexo inferiori continuata, qua caeterae interiectarum fibrae *f*) a fibris circumflexi distinguuntur, a qua illae quasi oriuntur. In alio corde, vbi circumflexus superior pulchre in pulmonales insertus, inferior manifesto, at singulari

 modo,

a) Tab. I. 7.
b) Tab. IV. F. y. z.
c) Tab. IV 2 3. 5.
d) Tab. IV. 2.
e) Tab IV. 4.
f) Tab. IV. 4. 4. 5. 6.

modo, ab interiectis distinctus erat, duplices interiectas, admodum distinctas, vidi; alteras superiores, seu posteriores, a circumflexo inferiori ortas, in regione coni arteriosi, qui multo maior etiam quam in hoc corde, at non separatus erat, in crenam insertas; alteras inferiores, inter circumflexum inferiorem et fasciam infundibuli contentas, insertas in pontem. Mea ergo sententia minime quidem excludendae fibrae interiectae ex numero fibrarum cordis, verum admodum variabiles tamen, censendae esse videntur, quae nunc hoc, nunc alio, modo se habeant, distinctius nunc et manifesto, nunc obscure, appareant, vestigia tamen sui vbique ostendant, et hoc saltim habeant constans, vt transeant in pontem, nec tamen vel ab arteria pulmonali, vel ab aorta, vel filo oriantur cartilagineo dextro, sed ab aliis potius fibris originem ducant, ab iisque includantur. Atque eiusmodi fibras in hac cordis sede vix vnquan defuturas esse arbitror.

Nec magis fasciola, quae pontis instar super crenam transit.

Simili fere modo cum illa fasciola comparatum est, quam *pontem* dixi *a*). Hic in hoc corde apparet, *b*) sed minus distincte, imprimis inferius, terminatus, minusque eleuatus. In alio corde duplicem pontem reperi, alterum superiorem, qui minus, alterum inferiorem, qui magis, eleuatus erat. Modo propior basi, modo magis ab ea remotus, modo distinctior, modo minus distinctus, est, imprimis in margine suo inferiori. Pendet a decursu arteriae coronariae sinistrae. Haec in corde priori, vbi ad pontem venerat, ramum edebat superficialem, ad adipem super pontem progressum. Truncus ipse in carnem descendit, continuatque sub ponte, exitque rursum ad marginem

a) Tab I. 87.
b) Tab. IV. 73. 75.

nem eius inferiorem, quo fibrae ergo, quae pontem efficiunt, infigniter eleuantur, et diſtinctae fiunt a vicinis. In aliis cordibus non ipſe truncus, ſed ramus, maior vel minor, in carnes cordis deſcendit, minusque ergo quam truncus pontem eleuat; truncus ſuperficialis in crena verſus apicem deſcendit, continuo ramos penetrantes carnem, producens. Prout ergo vel truncus ipſe ſub pontem ſe recipit, vel ramum mittit maiorem, vel minorem, pons magis vel minus inſignis eſt; provt illud poſt breuiorem aut longiorem progreſſum fit, propior baſi vel remotior ab ea pons efficitur. Pons ergo dari vbique videtur, ſed variabilis figura magnitudine et ſede, ſicut fibrae interiectae.

Conſtantiſſimae vero infundibuli fascia magna.

Multo conſtantiores ſunt fascia infundibuli magna, fascia angularis, et ventralis. *Fascia infundibuli*, orta a filo cartilagineo anteriori dextro, mediam tranſitu occupare partem, angulo tamen propiorem, marginis baſilaris, nec dimidia minorem, latis conſtare fibris, frequenti nexu confuſis, tranſire vsque ad crenam, inferique in vltimam regionem pontis, conſtanter obſeruata eſt. In hoc corde orta a filo *a*), tranſiensque ſuper partem baſilarem *b*), marginemque baſilarem *c*), ſicut in corde primo *d*), in ſuperiorem ſuperficiem venit *e*), et in crenam vsque progreditur *f*), ſicuti in corde primo *g*). In eo ſolo differt, vt anguſtiori fine ad crenam terminetur *h*), cum in primo

---

a) Tab V. 16. 19.
b) Tab. V. 15 17 19. 20.
c) Tab. V. 17. 20.
d) Tab. II. 16. 17. 17. 17.
e) Tab IV. 2. 16.
f) Tab. IV. 9. 17.
g) Tab. I. K. G. 9. 17.
h) Tab. IV. 9. 17.

mo corde *a*), vti in reliquis, aequali magnitudine ad crenam vsque progrediatur.

Et fascia angularis.

Angularis fascia, conſtantiſſima, extremitate oritur, vt in caeteris, ſic in his cordibus duobus, acuta, ex angulo inter ſtriam et filum cartilagineum poſterius finiſtrum *b*); in hoc quidem principio, tecto fibris ſolitariis ſtriae *c*). Hinc lateſcendo magis magisque ad angulum cordis peruenit latiſſima, eumque flexa inuoluit *d*). Sic prodit in ſuperiorem ſuperficiem *e*), vbi, diuiſa in duas portiones, longam *f*), et brenem *g*), in priorem inſertam, latitudine ſucceſſiue imminuta, fine demum anguſto in crenam ſe inſerit *h*). Et id praeterea peculiare habet in cordibus his ambobus, vti in caeteris, quae vidi, cordibus, vt frequenter tum ſui ipſius fibrae inter ſe, tum etiam iſtae cum fibris fasciae infundibuli, vti et huius fibrae inter ſe, inordinata coalitione et fibrillis copioſis connectantur *i*). Denique, vti primae fibrae fasciae angularis in corde primo, reſolutae in fibrillas, in vltimam fasciae infundibuli magnam fibram ſe inſerebant *k*), et ſequentes mediae tandem *l*) longam efficiebant portionem, in quam breuis inſerebatur; in hoc nouo corde

---

a) Tab. I. 9. 17. 17. 17.
b) Tab. VI. 82. 83. 84. 85. 87. 88. Tab. III. D. G. E. M.
c) Tab. VI. e. i.
d) Tab. VI. 83. 88. Tab. III. G. M.
e) Tab. IV. 16. 30. Tab. I. 24. M.
f) Tab. IV. 19. 26 27 28. Tab. I. 18. 29. 27. 28.
g) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24 30. 31.
h) Tab. IV. 19. 29. 25. 30. 27. 28. Tab. I. 18 24. 30. 27. 28.
i) Tab. IV, 17. 17, etc. Tab. I. 19. 29. 29. etc.
Tab. IV. 20. 24. Tab. I. 18. 16.
k) Tab. I. 18. 19.
l) Tab. I. 25. 26. 27.

corde etiam multo luculentius res eadem apparet, vbi prima portio *a*) ad fasciae infundibuli insignem latamque fibram fibrillis resolutis redit, media vero *b*) longam efficit portionem, dum breuis ad longam se applicat *c*). Vidi tamen in aliis cordibus eiusmodi primam portionem, insertam in infundibuli fasciam, deficere. Vides ex his, fere singula, quae de angularibus fibris in descriptione earum dixi, duobus his communia esse cordibus, nec quidquam prope illi descriptioni inesse, quod ad indiuiduum pertineret, nisi forte acutum rostriformem, quo in crenam se inserit, finem in primo corde, et qui simplex in hoc et aliis repertus est, huc referre velis. Deinde omnino transuersim in hoc corde angularis fascia progreditur, quae obliquior in corde primo erat, vnde et angustior in hoc corde extremitas fasciae infundibuli pendere videtur. Similique modo et in caeteris, quae vidi, cordibus hae fibrae cum descriptis conueniunt.

Et ventralis in vniuersum.

Ventralis fascia, in vniuersum spectata, haud minus constans reperta. Orta ex fibris, a stria secedentibus, *d*) transversim fere ad marginem progreditur in corde vtroque, circa quem flexa, in multas minores fasciolas diuiditur, et in crenam se inserit. Minores has fasciolas minime constantes inueni. Neque id in prima earum descriptione speraui. Comparatio huius cordis *e*) cum corde primo *f*) facile docebit, vix vllam

a) Tab. IV. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.

b) Tab. IV. 26. 27. 28.

c) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24. 30. 31.

d) Tab. VI. *h. f. g. l. m. x.* 3. 48. 100. Tab. III. 54. 60. 63. 68. 70. 72.

e) Tab IV. 32. 33. 34. 35. etc.

f) Tab. I. 37. 38. 40. 41. 44.

vllam harum fasciolarum eandem reperiri in altero corde quae in altero obseruata esset. Inueni in alio aliquo corde fasciolas satis simili modo dispositas, vti in corde primo. Cum tamen similem similitudinem in aliis haud porro reperirem cordibus, casui potius aliqualem illam, quam veritati structurae, similitudinem adscripsi. Non negauerim quidem, aliquam constantiam etiam his fasciolis inesse, verum enucleare eam ex paucioribus meis obseruationibus hactenus non potui.

Vti et apicis fasciola.

Apicis vero *fascia*, seu vltima ventralis pars, egregie satis in pluribus cordibus conuenire inuenta est. Distincta a caeteris fasciolis ventralibus *a*) oritur ab vltima parte striae, vbi haec in fibras resolui incipit *b*), flexaque circa marginem, in multas minores fasciolas, directione fibrarum diuersas, diuisa ad crenam progreditur. Inter has maxime se distinguit vltima, quae ipsum apicem efficit, fasciola in corde vtroque *c*), fibris constans parallelis, transuersis in priori, oblique adscendentibus in hoc posteriori, corde.

Duo in hoc corde singularia qua ratione et descriptam fabricam cordis confirment, et vltro doceant. Alterum, conus arteriosus.

Duo in hoc corde singularia occurrunt, quibus id differt a corde priori, et reliquis, quae vidi nudata, cordibus, at quibus minime, vt fieri solet varietatibus, obscurior structura et dubiosa redditur, sed potius luculentius explicatur et demonstratur. Alterum est, cuius mentionem iam feci, *conus arterio-*

a) Tab. IV. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Tab. I. 47. 48. 49. 50. 51. 52 — 58.
b) Tab. VI. 93. *x*. 3. 45. 98. 100. Tab. III. 67. 68. 70. 72. 75.
c) Tab. IV. 45. Tab. I. 58. 58.

arteriosus. Videram in alio quodam corde hunc conum margine sinistro terminatum, magis multo, quam caetera pars marginis sinistri ventriculi dextri ad crenam distincto, magisque eminente. Idem margo in eo corde et longior multo fuerat quam in corde delineato priori. Videbam post haec eundem conum in corde dicto delineato primo, margine quidem sinistro breuiori, at satis eminente tamen instructum. Quum in vtroque, quod tum videram, corde per totam suam superficiem posteriorem separatus a ventriculo sinistro et septo, quod hunc in ea sede terminat, conus esset, et solo margine suo sinistro crenae adhaereret, quin totus reflecti possit; non poteram non pro peculiari et distincta ventriculi dextri parte hunc conum habere. Is nunc ergo in hoc repraesentato corde non modo margine sinistro satis longo et eminente, superficieque posteriori ad eum marginem vsque libera apparet, quo prior structura confirmaretur, sed margine sinistro ipso libero conus totus a corde, cui incumbit, separatus existit adeo, vt totus reflecti possit. Fibrae scilicet circumflexae sinistrae, quae ad crenam marginem sinistrum coni annectere solent, circa hunc marginem flectuntur, atque in coni superficie posteriori descendunt, quemadmodum in superioribus dictum est. Sic conum ergo, qualem in structura perfecta eum esse oportet, vides; nonnisi imperfectiorem structuram esse solitam, qua margine sinistro crenae inhaeret, intelligis.

Alterum apices ventriculorum.

Alterum singulare *apices* offerunt *ventriculorum*, mire in hoc corde eminentes *a*) insignique interstitio *b*), in quo crena et

a) Tab. IV. P. T. Tab. VI. 80. 100.
b) Tab. IV. E. Tab. VI. 101.

et ſtria concurrunt, diſtincti; vnde et proprium cuique ventriculo apicem eſſe vides, et conditionem intelligis horum apicum. Dexter *a*) figura papillaris, ſitu prope crenam collocatus *b*), oppoſitus orificio venoſo ventriculi dextri, *c*) longitudinem huius ventriculi ad lineam redigit, a medio margine baſiliari, ſiue ab orificio venoſo, ad apicem ductam, *d*) et fibras ergo ventriculi transuerſales efficit. Sinister contra *e*) obtuſus, rotundus, remotus a crena et ſtria *f*), orificio arteriofo ſui ventriculi oppoſitus, *g*) longitudinem ventriculi ab illo orificio ad apicem ducendo, fibras ventriculi longitudinales eſſe facit.

Explicatio Tabularum.

Cor hominis ſani, robuſti, triginta aliquot annorum, frigore necati.

Tabula IV.

Superficies huius cordis ſuperior. Fibrae externae.

A. Ventriculus dexter.

B. Sinister.

C. D. E. Margo ſiniſter ventriculi dextri, quo applicato ad ventriculum ſiniſtrum crena effici ſolet.

C. D.

a) Tab. IV. P. Tab. VI. 100.
b) Tab. IV. E.
c) Tab. IV. *o*.
d) Tab. IV. *o*. 8. P.
e) Tab. IV T. Tab. VI. 80.
f) Tab. IV. T. E. Tab. V. 80. 101.
g) Tab. IV. *z*. T.

C. D. Pars huius marginis, quae margo simul sinister coni arterioſi est, quae pariter, ac reliquus margo (D. E.) crenae adhaerere, eiusque postremam partem efficere solet, in hoc corde vero separatus est; vt totus conus arterioſus (C. D. F. G.) vna cum arteria pulmonali eleuari et antrorsum reflecti possit.

D. E. Crena.

C. Marginis ventriculi extremitas superior, apex coni, arteriaeque pulmonalis basis, in latere sinistro. (Tab. I. C.).

D. Basis coni arterioſi in latere sinistro, et terminus quo vsque conus liber ab adhaesione reflecti potest. (Tab. I. L.)

E. Vallecula inter apices ventriculorum distinctos, in qua finis crenae. Vt nullus ergo detur communis apex cordis. (Tab. I. D.)

F. Apex coni arterioſi et basis arteriae pulmonalis in latere dextro. (Tab. I. J.)

F. C. Apex coni arterioſi et basis arteriae pulmonalis. (Tab. I. J. C.)

F. G. J. Margo basilaris. (Tab. I. J. K. 25.)

G. Sedes in hoc margine, ad quam vsque conus arterioſus in latere dextro reflecti potest. (Tab. I. J. G.)

G. D. Basis coni arterioſi. (Tab. I. O. L.)

G. D. F. C. Conus arterioſus totus. (Tab. I. J. K. C. L.) separatus in hoc corde tota sua superficie a ventriculo sinistro et a septo, sola basi cordi adhaerens; nimirum parte eius anteriore parieti ventriculi dextri superiori, posteriori septo, continuus.

H. D. Pars media crenae, seu regio pontis. (Tab. I. L. 21.)

I. Angulus cordis dexter (Tab. I. G. M.)

I. K. F. C. Pars infundibuliformis. (Tab. I. 25. 28. J. C.)

K. Terminus fibrarum latarum ventriculi dextri ad crenam. (Tab. I. 28.)

L. M. F. C. Pars arterioſa ventriculi. (Tab. I. G. H. J. C.)

L. A. E. M. Pars venoſa. (Tab. I. G. A. D. H.).

L. I. N. 30. Pars angularis. (Tab. I. G. M.).

O. A. Pars ventralis. (Tab. I. M. A. N.).

O. M. P. Regio apicis. (Tab. I. N. H. D.).

P. Apex ventriculi dextri papillaris, mire prominens in hoc corde. Videtur a robore muſculi (99. 100.), quo vallecula (E.) in crenam retrahitur; adeoque interſtitium inter binos ventriculorum apices (P. T.) augetur, prominentia pendere apicum ipſorum. Vt ergo validioris, proinde perfectioris, ſtructurae indicium ſit apicum prominentia; conſequenter norma ſtructurae humanae.

Q. Angulus cordis ſiniſter. (Tab. I. 59.) ſeu tuber ventriculi ſiniſtri.

Q. p. 48. Tuberis huius ſeu anguli limites.

Q. C. D. R. Regio funium. (Tab. I. 59. C. L. 85.).

R. D. S. H. Regio crenae media ſeu regio pontis. (Tab. I. L. 21. 85. 91.). Fibrae ordinis tertii, non ſatis accurate notatae in corde priori.

S. H. E. T. ſiue 83. 84. 88. 88. 99. 98. 93. 85. Regio apicis ſeu regio radiata ſuperior. Fibrae ordinis quarti (Tab. I. 94. 95. 98. 104. 97).

T. Apex ventriculi ſiniſtri. (Tab. I. E.) marginibus incluſus ſiniſtro, (Q. T.) et anteriori (T. E.). Ad hunc apicem proxime, in ſuperiori ſuperficie centrum focorum (102.).

T. B.

T. B. Q. Margo ventriculi et cordis ſiniſter.

T. E. Margo ventriculi ſiniſtri anterior, breuis, ad quem in inferiori ſuperficie ſocus inferior, in ſuperiori funiculus terminalis ſuperior (99. 100.) collocatus.

T. E. ſiue 100. 99. 108. 104. 106. Portio regionis radiatae inferioris. Pars marginis enim (E. T. 88. 105. 104.) magis in icone in ſuperiorem ſuperficiem retracta eſt, vt focus ſuperior totus in ea et centrum focorum (102.) repraeſentari poſſit. In ſitu naturali funiculi procurrentes (74. 88.) in ipſo margine ſiti ſunt, (103. 104. 106.) minimeque in ſuperiori, ſed potius in inferiori ſuperficie apparent; et funiculus (99. 100.) ſuperficiem ſuperiorem fere terminat cum extremitatibus funiculorum (103. 104.) in illum inſertis.

Ad eas ventriculi regiones intelligendas, notentur hic etiam, quae in ſequentibus plenius explicabuntur: (73. 73. 73. 74. 74.) Funiculus procurrens longus, ſiue maior, quo pontis regio a regione funium, et tertius fibrarum ordo a ſecundo, diſtinguitur. (83. 84. 85. 86. 87. 88.) Funiculus procurrens breuis, ſiue minor, quo pontis regio a regione radiata, et tertius fibrarum ordo a quarto, diſtinguitur. (p. 50. 54.) Linea diagonalis, quo vsque in ſuperiori ſuperficie appareret, qua ſcilicet pars venoſa ventriculi ab arterioſa diſtinguitur. Vt (p. Q. 50.) ergo ad venoſam, (p. C. E. T. B. 54.) ad arterioſam, pertineat.

V. Pars baſilaris (Tab. I. O.).

W. Arteria pulmonalis.

X. Eius ramus ſiniſter. Y. dexter.

Z. Aorta.

a. Innominata.

b. Arteria ſubclauia dextra.

c. Carotis dextra.

d. Carotis ſiniſtra.

e. Subclauia arteria ſiniſtra.

f. Aorta deſcendens.

g. Arteria coronaria dextra, in ſuo ſitu, ſuper carnes elevata, in adipe dextrorſum antrorſum ſublimior progrediens (Tab. I. *b.*).

h. Sinus ſiniſtri pars. (Tab. I. *i.*)

i. Auricula ſiniſtra reflexa (Tab. I. *k.*)

k. l. Sinus dexter (Tab. I. *l.* 133.).

m. Auricula dextra in ſuo ſitu naturali, remota a baſi cordis in corde nudo (Tab. I. *n.*), vbi adeps ad baſin remotus.

n. Vena caua ſuperior.

o. Filum cartilagineum dextrum anterius, quod valde obſcurum in hoc corde et vix vllum fuit.

p. Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum recte formatum (Tab. I. *w*).

q. Sinus valuulae ſemilunaris anterioris ſiniſtrae arteriae pulmosnalis (Tab. I. S.).

r. Sinus valuulae dextrae (Tab. I. T.).

s. t. w. C. Fibrae circumflexae ſiniſtrae (Tab. I. *x.* C. L.); flexae in hoc corde circa marginem ſiniſtrum coni in poſteriorem huius ſuperficiem, in qua oblique deſcendunt (Tab. V. *x.* Z. *v. y.*).

t. v. w. x. Fibrae pulmonales anteriores (Tab. I. *y. z.* 1. 2. 3.).

w. For-

w. Foramen pro arteriae caronariae ramo maximo, cuius loco in corde priori ipſe truncus ſub pontem ſe recipiebat (Tab. I. *e*.).

x. Alterum minus foraminulum pro ramulo minore.

y. Terminus inter circumflexum dextrum ſuperiorem et inferiorem in margine baſilari.

y. F. *v*. 2. Circumflexus dexter ſuperior ſiue pulmonalis poſterior (Tab. I. 4.), qui primis fibris, vt ſolet, in baſin arteriae pulmonalis et in latam magnam fibram pulmonalem, ſequentibus autem continuando in ipſas interiectas fibras (2.) tranſit.

y. *z*. 1. Circumflexus dexter inferior, ſiue aorticus, (Tab. I. 5.) cuius primae fibrae in interiectas continuando tranſeunt (3.), ſequentes in ſingularem huius muſculi fibram longam (1.), quae ipſa ad crenam pervenit, inſeruntur.

z. Terminus inter circumflexum dextrum inferiorem et faſciam magnam infundibuli in margine baſilari.

1. Fibra longa in hoc corde circumflexi inferioris, in quam reliquae fibrae (7. 7.) inſeruntur.

2. 3. 4. 4. 5. 5. 6. Fibrae interiectae (Tab. I. 7.), quarum primae a circumflexo ſuperiori (2.), aliae (3.), ab inferiori, aliae (4. 4.) a fibra longa inferioris (1.), oriuntur, inſeruntur in pontem (5. 5. 6.), vt ſolent.

7. 7. Inſertio circumflexi inferioris.

8. *z*. 9. 12. 13. 14. 15. 16. 17. Faſcia magna infundibuli (Tab. I. 8. 14. 9. 17.).

8. 9. Primae eius fibrae ad crenam peruenientes.

10. 11. Sequentes fibrae ad priores applicatae.

12. 13. Sequentes ad crenam tranſeuntes.

14. 15. Sequentes ad priores applicatae.

16. 17. 17. Vltimae ad praecedentes partim applicatae, partim productae ad crenam.

18. Fibrillae, fibras connectentes, superficiales.

19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. Fascia angularis (Tab. I. 18. 24. 26. 27. 28. 30. 31.)

19. 20. 22. 25. Eius portio in fasciam infundibuli inserta (Tab. I. 18. 19. 25.)

26. 27. 28. Portio media, longa, in crenam inserta (Tab. I. 25. 24. 29. 29. 26. 27. 28.).

29. 30. Portio tertia brevior, in priorem inserta (Tab. I. 24. 30. 31.).

19. Primae huius fasciae fibrae latae breuissimae, fibrillis, in quas resoluuntur, in vltimam fasciae infundibuli fibram insertae. Harum simillimae in corde primo (Tab. I. 19. 18.).

20. Earum resolutio et insertio (Tab. I. 18.)

21. Alia fibra lata, solutis fibrillis in fasciam infundibuli inserta.

22. 23. 24. 25. Alia fibra lata, aliqua parte integra, (24.) altera, in fibras resoluta (25.), in fasciam inserta. Sic variis scilicet modis fibrae inter se connectuntur, et distribuuntur.

26. 27. 28. Fibrae sequentes in tenuiores iam resolutae, quae longam portionem efficiunt.

29. 30. Portio breuis. Vti fascia angularis, terminum efficiens fibrarum latarum ventriculi dextri, constanter ortui funiculi procurrentis breuis (83. 85.) ad crenam sua insertione respondet, ea ratione, vt prima illius portio (83.) angularem (27. 28.) secunda (85.) primis ven-

ventrales fibras (31.) recipiat; videtur hic inſertionis fibrarum dextri ventriculi ordo conſtans eſſe: vt circumflexae ſiniſtrae poſtremam partem crenae (*s. t.* C. *w.* Tab. I. *v.* C. L.), pulmonales et interiectae fibrae pontem (2. 3. 4. 5. 5. Tab. I. *y.* 2. *z.* 3. 7. 9.), faſcia infundibuli reliquam regionem pontis (8. 9. 14. 15. 16. 17. Tab. I. 11. 11. 11.) et ventrales denique ſiue tenues fibrae omnes radiatam crenae regionem ſua inſertione occupent.

31. &c. vsque ad 45. Faſciolae ventrales, inconſtantes, quae in hoc corde ſequenti modo ſe habent.

31. 32. Faſciolae ſub angularibus fibris prodientes, interſtitium, quod vltimae angulares, ad ſuas praecedentes ſe applicando, reliquerunt, replentes.

33. Nouae adſcendentes fibrae ad primas ſe applicantes.

34. Aliae adſcendendo ad priores ſe applicantes.

35. 36. 37. 38. Faſciolae fere parallelae oblique adſcendentes.

39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Apicis fibrae. Hae et in corde priori (Tab. I. 47. 48. 49. 50. vsque ad 58.) reperiuntur.

45. Vltimae apicis fibrae (Tab. I. 58. 58.).

46. 66. 71. ſiue Q. C. D. R. Funes, ſiue ſecundus ordo fibrarum ventriculi ſiniſtri.

46. 47. 48. 49. 50. Funiculi minores, ſeu primae fibrae ordinis ſecundi (Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. Funis magnus ſiue diuiſus, ſeu laceratus (Tab. I. 64. 65. 66. 67.)

51. 55. 56. Portio altera in hoc corde maior (Tab. I. 67.)

52. 54. Altera portio (Tab. I. 64.)

53. Anaſtomoſis.

57. Fibrae longitudinales.

58. Interſtitium fibrillis repletum ſolitis transuerſis.
59. Fibrae nectentes ſuperficiales.
60. 61. 62. Funis ramificatus (Tab. I. 70. 71. 72. 73.)
63. Fibrillae nectentes ſolitae profundae.
64. Fibrae nectentes transuerſae ſuperficiales in ventriculo ſiniſtro, quae et in fibrillas paſſim abire videntur, breves, craſſae, ex fibris alterius funis in alterius fibras continuatae.
65. 66. Funis applicatus, qui duplex in corde priori (Tab. I. 81. 82. 83. 84.)
65. Eius origo praecipue ab aorta.
66. Tum et a columna triangulari.
67. Notabilis fouea ſeu ſpelunca inter conum arterioſum (C. D.) et funem applicatum (65.) quae retro conum dextrorſum continuat et cuius funis ſiniſterius oram efficit. Reflexo cono fouea continuata apparet.
68. Foramen in hac fouea pro primo ramo arteriae coronariae ſiniſtrae.
69. Fibrillae ſuperficiales nectentes.
70. 71. Rami funis applicati.
72. Foueolae, fibrillis nectentibus repletae, fibris diſtinctae breuibus craſſis nectentibus.
73. 75. 79. Pontis regio (Tab. I. 87. 17. 17. 17.)
73. 75. Pons primus imperfectior. (Tab. I. 87.)
79. Caetera pontis regio, ſeu pons ſecundus. (17. 17. 17.)
73. 74. 75. 77. 79. 81. 82. Fibrae ordinis tertii, procurrente longo conſtantes et fibris, ad eum applicatis, ortae a tota pontis regione, collectae ad procurrentem, eoque in terminalem inferiorem inſertae.
73. 73. 73. Funiculus procurrens longus, ex ſuprema pontis regione (73.), cui applicatus accedit (72. 69.), ortus, continuatus ad marginem vsque.

74.

74. 74. Eius ad marginem continuatio.
105. Eius insertio in fasciculum terminalem inferiorem (104.). Haec procurrentis funiculi longi extremitas, inserta in terminalem, prima fibra est foci inferioris, quam postea ordinis secundi fibrae ordine retrogrado sequuntur (106.).

75. 77. 78. 79. 81. 82. Fibrae reliquae ordinis tertii, ad procurrentem longum applicatae.

75. 77. 78. Fibrae earum, ex ponte primo in hoc corde ortae, ad procurrentem vsque continuatae, in eumque insertae.

76. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae sinistrae.

79. 81. 82. Fibrae ex reliqua regione pontis subortae, in angulum concurrentes inter procurrentem longum et brevem (84. 88.), sub eosque se recipientes funiculos procurrentes, insertae tandem in longum.

80. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae.

83 — 87. 88. 101. 89. 90. 92. 95. 97. 98. Fibrae ordinis quarti, seu fibrae radiatae, quae figuram radiatam superiorem inter se concurrendo, et focum superiorem, efficiunt, procurrente constantes brevi, et fibris radiatis reliquis, ad illum applicatis.

83. 84. 85. 86. 87. 88. Procurrens minor sive brevis; musculus biceps, ortus a prima parte regionis radiatae crenae, vbi vltimis latis primisqui tenuibus fibris ventriculi dextri respondet.

83. Eius alterum caput, posterius, quo fibris angularibus et fasciae infundibuli fibris partim respondet.

84. Huius capitis continuatio.

85. Caput alterum, anterius, quo primis ventralibus fibriis respondet.

86. Fibrae transuersales nectentes superficiales, breues crassae,

quibus bina capita inter se connectuntur, interstitiis fibrillis repletis profundioribus tenuioribusque.

87. Binorum capitum coniunctio et progressus ad marginem.

87. 88. 88. Cauda procurrentis breuis, siue ea eius pars, qua caeteras radiatas fibras recipit, focumque ea ratione efficit superiorem. Is focus nimirum pennatus est, vt fibrae (89. 90. 93. 92. 94. 95. 97. 98.) successiue ad eum se applicent, non in vnum concurrant punctum; deinde et ramificatus idem est, vt aliae longiores (93. 95. 96.) ad evm ipsum perueniant, aliae breuiores (97.) ad illas longiores se applicent, cum iisque se tandem in procurrentem inserant.

89. 90. 91. Primae fibrae radiatae curuatae, pennatim se ad procurrentem ipsum applicantes.

93. 93. Fibra, quae nunc sequitur, radiata longior, procurrentis ramus, alias recipiens breuiores fibras, ipsa in procurrentem inserta.

92. 94. 94. Fibrae radiatae minores, in fibram (93. 93.) insertae.

95. 96. Fibra secunda radiata longior, secundus ramus procurrentis minoris, aut foci ramificati ramus secundus, insertus in procurrentem, recipiens omnes reliquas fibras radiatas, pennatim sibi insertas.

97. 98. Fibrae radiatae reliquae, transuersim fere, et minus curuatae, marginem versus tendentes, pennatim in secundum ramum (95. 96.) foci ramificati superioris insertae.

99. 100. Fasciculus terminalis superior, ortus in inferiori cordis superficie (Tab. VI. 8.), vel potius in ipsa vallecula aut interstitio inter apices ventriculorum, a fasciculo terminali ventriculi dextri (Tab. VI. 98. 100.) recta in superiorem, quasi attractus, superficiem properans.

99.

99. Vbi quaſi attractus partem interſtitii apicum ventriculorum prominentium replet, tranſiens in ſuperiorem ſuperficiem.

100. Extremitas vnciformis, ſeu vncus, applicatus ad extremitatem procurrentis funiculi breuis, pariter vnciformem.

101. Extremitas vnciformis, ſeu vncus funiculi procurrentis breuis, applicatus pariter contra vncum fasciculi terminalis.

102. Centrum commune focorum, quod duobus deſcriptis vncis, ad ſe mutuo applicatis, continuatisque in ſe mutuo, vt circulum incluſa foueola rotunda efficiant, formatur.

103. Fasciculus terminalis medius, ortus in inferiori ſuperficie ex vallecula a capitato principio in hoc corde fasciculi terminalis ventriculi dextri (Tab. VI. 6.), continuatus per marginem prominentem ventriculi ſiniſtri (Tab. VI. 6. 7.), et oblique flexus in ſuperiorem ſuperficiem (103.), vbi in ſuperiorem fasciculum inſeritur.

104. Fasciculus terminalis inferior, ortus in inferiori ſuperficie proxime ſuper valleculam (Tab. VI. 4.), continuatus maximam partem in inferiori ſuperficie (Tab. VI. 5.), denique flexus in ſuperiorem (104), partim in terminalem medium, partim in ſuperiorem ante medium, inſeritur.

105. 106. Portio ſuperior dexterior (Tab. VI. 75. 76.) foci inferioris (Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75. 76.). Nimirum ſedes centri focorum communis cum ſedibus vtrinque vicinis crenam et baſin verſus oblique in ſuperiorem retractae ſunt ſuperficiem, vt et focus ſuperior, et centrum commune, et huius connexio cum foco vtroque, in icone repraeſentari poſſit. Eaedumque ſedes ſimili ratione in inferiorem ſuperficiem retractae

ſunt ob cauſam eandem, cum inferior ſuperficies delinearetur. Vera focorum et centri communis ſedes in margine potius aut proxime ad eum in altervtra ſuperficie, in Diſſertatione praecedente deſcripta eſt.

105. Extremitas funiculi procurrentis longi, quae prima fibra foci inferioris (Tab. VI. 76.) eſt, et extremitatem eius ſuperiorem ſiniſteriorem efficit, proximam centro communi.

106. Pars proxime ſequens foci inferioris (Tab. VI. 75.), vltimis conſtans fibris ordinis ſecundi, vti a caeteris huius ordinis fibris focus inferior reliquus efficitur.

Tab. V.

Eiusdem cordis fibrae externae in ſuperficie baſilari et origines funium; aorta et arteria pulmonali, vt in corde priori, reſectis, cono arterioſo reflexo.

a. Aortae abſciſſae lumen.

b. Angulus dexter aortae ad baſin (Tab. II. 13.).

c. Angulus ſiniſter (Tab. II. 3.), cui nodulus cartilagineus ſiniſter inſidet.

d. Concauitas aortae anterior (Tab. II. D.)

e. Latus poſterius, quod pariter in hoc corde ac anterius concauum, cum potius introrſum conuexum id in corde priori eſt. (Tab. II.).

f. Alia in hoc corde varietas, defectus fili cartilaginei dextri. Nimirum ſola cellulosa in tota hac ſede, loco fili cartilaginei, ſinus dexter cum dextro ventriculo coniunctus erat; vt ſoluta praeparatione fibrarum remotaque omni cellulosa, fiſſura, in cauitatem cordis hians, appareret. Membrana ſcilicet interna, a valuulae duplicatura continuata diſrupta fuit.

g. Fi-

g. Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum ſatis manifeſtum, nodulo, ſeu baſi larga fortique, aortae innata. (Tab. II. 4.)
h. Sinus pulmonalis.
i. Auricula ſiniſtra reflexa.
k. l. Rami venae pulmonalis anterioris dextrae.
m. Vena pulmonalis anterior ſiniſtra.
n. Sinus dexter.
o. Vena caua ſuperior.
p. Auricula dextra.
q. Lumen reſectae ad baſin arteriae pulmonalis.
r. s. Cornua, ſeu termini vtrinque valuulae ſemilunaris dextrae arteriae pulmonalis. Vt fere maior valuulae pars poſteriori, minor anteriori, baſis arteriae lateri ſua baſi inſideat.
r. Sedes cornu anterioris valuulae dextrae; ſeu noduli inter valuulam dextram et anteriorem.
s. Sedes cornu poſterioris valvulae dextrae, ſeu noduli inter valuulam dextram et poſteriorem.
t. r. Sedes valuulae anterioris.
t. Sedes cornu ſiniſtri valuulae anterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem. *r.* ſedes cornu dextri valuulae anterioris, aut noduli inter anteriorem et dextram.
s. t. Valuulae poſterioris ſedes.
s. Sedes cornu dextri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam poſteriorem et dextram. *t.* Sedes cornu ſiniſtri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem.

Valuula ergo anterior tota parieti arteriae anteriori, poſterior tota poſteriori, dextra lateri dextro, partimque anteriori, partim poſteriori, parieti adhaeret.

u. Portio minor funis applicati (Tab. IV. 66.), quae retro baſin

baſin coni ad columnam triangularem tranſit, et ſpeluncam vna cum cono in ſitu naturali et cum maiori portione funis efficit. (Tab. IV. 67.). Oritur a columna triangu'ari, vltimumque efficit funem.

v. Orificium pro primo ramo arteriae coronariae ſiniſtrae in hac portione funis (Tab. IV. 68.).

w. Baſis coni arterioſi in latere ſiniſtro (Tab. IV. *w.*).

x. z. 5. 17. Conus arterioſus reflexus, totus liber in hoc corde, et ſeparatus a ſepto.

x. Apex coni in latere ſiniſtro.

z. Baſis in eodem, qua portioni minori funis applicati ad haeret.

x. z. Latus coni reflexi ſiniſtrum, liberum ad baſin ſeu inſertionem fibrae circumflexae (*z.*) vsque.

x. z. 51. 53. 1. *y.* Fibrae circumflexae ſiniſtrae in poſteriori coni ſuperficie.

x. z. 51. 52. 53. Fibrae circumflexae ſiniſtrae, quae a latere anteriori baſis arteriae pulmonalis eiusque angulo ſiniſtro oriuntur (Tab. IV. *s. t.* C. D.), circa latus ſiniſtrum coni in hoc corde flectuntur (*x. z.* Tab. IV. C. D.) in ſuperficiem eius poſteriorem, in eaque porro oblique deſcendunt; cum ad ipſum coni marginem (*x. z.*) in aliis cordibus hae fibrae finiantur, inſertae in crenam.

x. 53. Fibra ex ipſo angulo baſis arteriae pulmonalis ſiniſtro orta, in ſitu naturali vix appareus, ideoque in icone non expreſſa (Tab. IV. ad C.). Quae in aliis cordibus prima circumflexa ſiniſtra, omnium que breuiſſima eſt, et in ſupremam partem crenae, eiusque ipſum principium inſeritur. Quae ergo in hoc corde longa ad

ſuper-

ſuperficiem poſteriorem coni deſcendit in eademque (53.) inſeritur.

54. 52. Fibra (Tab. IV. C.) in aliis cordibus ſecunda, in crenam inſerta, quae in hoc circa conum flexa in eius ſuperficie poſteriori inſeritur (52.).

z. 54. Reliquae fibrae, in anteriori ſuperficie coni a baſi arteriae pulmonalis ortae, circa conum flexae, et in poſteriori eius ſuperficie inſertae (51. 52.).

z. z. Vltima harum fibrarum, (Tab. IV. *t.* D.) pariter in poſteriorem ſuperficiem flexa, in eaque breuiſſima, quae in anteriori longiſſima fuit.

x. y. 1. 53. Prioribus additae in hoc corde fibrae, a parte ſiniſteriori parietis poſterioris baſis arteriae pulmonalis ortae, iuxta priores (53. 1.) inſertae, in pariete anteriori plane non apparentes.

1. 53. 52. 51. Linea inſertionis circumflexarum ſiniſtrarum in pariete coni poſteriori.

1. 2. 3. 4. 5. 1. 6. 7. 8. Pulmonalis poſterior, ſeu circumflexus dexter ſuperior (Tab. II. 10.).

1. 2. 3. 4. 5. Solita portio longior huius musculi, a baſi arteriae pulmonalis poſterius orta, circumflexa in anteriorem ſuperficiem. (Tab. II. 9. 10. 11. 14.).

1. 6. 7. 8. Eadem, quae in aliis cordibus portio breuior, orta a foſſa triangulari, ad aorticum minorem applicata (Tab. II. 10. 11. L.), quae maxima parte fibrarum ad aorticum pariter ſe applicat quidem (7.), alias tamen fibras (8.) ad marginem baſilarem et in ſuperficiem ſuperiorem mittit, longiori portioni adiunctas.

9. 10. 11. Portio ſingularis carnea in hoc corde, quae videtur ad aorticum referenda eſſe, orta ab aorta, producta ad marginem baſilarem, adiuncta aortico maiori.

9. Principium huius portionis ab aorta.

10. Portio eius minor ad aorticum maiorem applicata.

11. Eius continuatio, qua tota portio circa conum flectitur.

12. Portio carnea in hoc corde, qua aorticus minor (14.) cum portione circumflexi in hoc corde (9.) coniungitur.

13. Foueola, quam longiorem, fiſſurae inſtar, in aliis cordibus frequentius vidi, et quae ramulum ab arteria coronaria recipere ſolet.

14. Aorticus minor conſtantiſſimus (Tab. II. 12.).

15. 16. 17. 18. Aorticus maior, aeque conſtans. (Tab. II. 13. 13. 14. 15. 16. 16.).

15. Eius principium ab angulo baſis aortae dextro (Tab. II. 13.).

16. 17. Terminus inter eum musculum et faſciam infundibuli magnam in principio (16.) et margine baſilari (17.).

18. Terminus inter aorticum ſeu circumflexum inferiorem et ſuperiorem.

19. 20. 16. 17. Portio baſilaris faſciae magnae infundibuli (Tab. II. 17. 16. 17. 17.).

19. 20. Terminus inter faſciam infundibuli et faſciam angularem in hac parte baſilari.

21. Portio baſilaris fibrarum angularium ſiue faſciae angularis.

22. Crena baſilaris, quam non ſatis recte in corde priori expreſſeram, quae tamen conſtanter reperitur. Incipit

haec

haec a foſſula, ſeu fiſſura (13.), continuat per apicem aortici minoris, per medium porro aorticum maiorem et fasciam infundibuli in corde vtroque. Pluribus de hac crena in prima Diſſertatione, vbi de parte baſilari dictum eſt, egi.

22. 23. 24. 25. 26. 27. Primae fibrae ordinis ſecundi, ſeu funiculi tenues. (Tab. IV. 46. 46. 47. 48. 49. 50. Tab. VI. 13. 14. Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

28. 29. Fibrae longitudinales interſtitii.

30. 31. 32. 38. 39. Funis magnus ſiue laceratus (Tab. IV. 51. 52. 54. 55. 56. Tab. I. 64. 67.).

30. Portio funiculi lacerati in hoc corde minor (Tab. IV. 52. 54. Tab. I. 64.).

31. Interſtitium magnum fibris tenuioribus repletum.

32. Portio maior (Tab. IV. 51. Tab. I. 67.).

33. Ramus anaſtomoticus (Tab. IV. 53.).

34. Foueola, fibrillis nectentibus repleta.

35. Ramulus anaſtomoticus.

37. Interſtitium, fibrillis ſolitis nectentibus repletum.

38. Ramus huius portionis maioris primus (Tab. IV. 55.).

39. Secundus ramus eiusdem portionis (Tab. IV. 56.).

40. Interſtitium, ſolitis fibrillis transuerſis profundis repletum.

41. Fibrae, in hoc corde primum inter funes viſae, transverſae ſuperficiales. (Tab. IV. 59.).

42. Interſtitium, fibris longitudinalibus repletum.

43. Funis ramificatus (Tab. IV. 60. Tab. I. 70. 71. 72.).

44. 45. Eius rami (Tab. IV. 61. 62.).

46. Interſtitium ſolitis fibrillis repletum.

47. Fibrillae ſuperficiales, in faſciculos collectae. (Tab. IV. 64.).
48. *u.* Funis applicatus. (Tab. IV. 65. 66. Tab. I. 81. 82. 83.).
49. 50. Huius funis rami (Tab. IV. 70. 71.).
48. Eius portio maior in hoc corde *u.* Portio minor.
51. Similes fibrillae nectentes.
52. Columna triangularis ſolita.
53. Solita foſſa triangularis.
54. Principium portionis minoris funis applicati.
55. Repetita columna triangularis, varietas in hoc corde.
56. Foſſula triangularis repetita, ſimilis varietas.

ANALY-

ANALYSIS CHEMICA AQVAE FLVVII NEVAE VRBEM PETROPOLIN PERFLVENTIS,

Auctore
J. G. GEORGI.

Comment. exhib. d. 12 *Octobre* 1786.

Situs vrbis, quae a diuo imperatore PETRO I. condita eſt, in planitie circa oſtia Neuae fluuii poſitae, fontes et ſcaturigines incolas circumſpicere vetat; adeoque aqua fluuii, iam per nauigationis emolumenta vtiliſſimi, etiam ad potum et vſus domeſticos ſumme neceſſaria et magni eſt momenti.

Haec fluuialis aqua Neuae a multis in genere, adeoque et in ipſa vrbe, admodum pura, atque ſanitati proficua creditur; alii vero, nec pauciores, in ea cauſam quaerunt diarrhoeae, cutaneorum morborum, aliorumque quibus aduenae vulgo Petropoli confligantur. Celeberrimus *Model* itaque analyſin huius aquae in ſe ſuſceperat, quae in eius opuſculis (kleine Schriften p. 103. ſeq.) exſtat, quaque eam puritate fere aquae Briſtolienſis, adeoque omni labe et culpa expertem declarat. Attamen experientia quotidie inculpationem praeconceptam renouat, et laudes aquae a Modelio tributas redarguit. Volui igitur, quandoquidem Modelius aquam ſupra vrbem e medio et profundo fluuii hauſtam adhibuit, denuo experiri qualis eſſet in ipſa vrbe, vbi vulgo hauriri ſolet, et vbi eam vndique canales ex vrbe deducti aliaque defluuia inquinant.

Equidem in ipſa vrbe iam nudis oculis apparet, aquam Nevae non perfecte puram eſſe. Pluribus riparum in locis fundus fluuii adeo lutoſus et inflamabili aëre foetus eſt, vt agitando limum breui aliquot lagenas huius aëris colligere facile ſit. Tranquillo etiam aëre ita parum pellucet aqua, vt vix diſcernas obiecta in pedali vel bipedali profunditate poſita; vento autem agitata etiam turbida euadit et fluctuum ſpumae, vel remorum agitatione excitatae, euidenter flaueſcunt. Eandemque tincturam prodit aqua magnis lagenis puriſſime pellucidis infuſa. Glacies fluuii hinc inde quidem pura et hyalina, paſſim vero etiam gryſea vel vireſcens, immo ſaepe nigricans, apparet.

Aqua, cuius analyſin trado, initio Julii anni 1785 poſt plurium dierum continuam ſerenam tempeſtatem, ſequentibus locis hauſta fuit:

1. Supra vrbem prope monaſterium S. Alexandri, e medio fluminis; hanc litt. A notatam *aquam ſuperam* appellabo.

2. In infera parte vrbis ex aduerſo decimae habitationum in Inſula Baſilii ſeriei (lineam 10^mam vocant); haec mihi erit *A. aqua infera*, e medio flumine hauſta.

3. In littore Inſulae Baſilii ad lineam ſeu ſeriem quintam, loco aquationis ſolito; hanc C. *aquam littoralem* vocabo.

4. E brachio Neuae *Moyka* dicto, directe verſus ſinum Fennicum tendente; D. *aqua Moyka.*

5. Comparationis ergo *aquam puteorum* in hortis et cellis inferae partis vrbis effoſſorum etiam explorare volui, quae quidem tanquam mere paludoſa, hominum potui inſeruire non ſolet, attamen multum in vſu domeſtico adhibetur.

Cuius-

Cuiusuis aquae quinquaginta libras medicas ſeu ſexcentas vncias ſumſi et deperditionis ſupplendae cauſa quinque vncias ponderi ſuperaddidi.

Experimentum I.

Aqua ſupera A. per quadraginta octo horas in lagena hyalina aſſeruata, puluiſculum quaſi in fundo depoſuiſſe viſa eſt.

Limpiditas caeterum, odorisque et ſaporis defectus perpuram indicant. Agitata bullulas haud copioſas edit; neque ponderoſior eſt quam aqua pluuialis.

Inla gena vitrea obturata, per quatuordecim menſes cellae commiſſa, nihil omnino mutata eſt.

Aquae reliquae B, C et D. fere eodem modo ſe habuerunt, niſi quod lagena D. copioſiorem, quam reliquae, puluiſculum depoſuiſſe viſa eſt. Plures autem aquae potatores aquam e medio fluminis hauſtam, ab aqua littorali et Moycae, guſtu diſtinguere bene callent.

Experimentum II.

Agitatione *aqua Neuae A.* bullulas non copioſe prodit, neque calore digeſtiuo multum aëris in veſicam collo appenſam expellit, et licet haec ſubinflectus a calore, refrigerata tamen veſica iterum collebaſcit. Deſtillata per retortam Tincturam heliotropii ſuppoſitam non decolorat. Adhibita ad confectionem aquae ſelterauae artificialis plus aëris abſorbet, quam aqua fontana. Forſitan is defectus aëris atque acidi aërii, cuius cauſa in curſu fluminis celeriore, aqueas particulas adterente, et in ſuperficiei, quam occupat, latitudine quaerenda eſſe videtur

detur, ex parte coëfficit aegritudinem, quam aduenae a continuo aquae potu experiuntur.

In reliquis aquis *B*, *C* et *D* non plus aëris expectabam, vnde ſingulas hoc ſcopo ſcrutari non opere pretium eſſe credidi.

Experimentum III.

Aqua omnis A, B, C et D ad chartas tinctas, et cum acidis vitrioli et ſachari, itemque cum tinctura gallarum ſpirituoſa et ſolutione ſalis tartari nullam mutationem demonſtravit; a ſolutione tamen ſachari ſaturni atomi natantes, et a ſolutione argenti in acido nitri opalinus apparuit in omnibus, ſed debilis, et inſequenti die in phialis probatoriis puluiſculus violaſcens ex *aqua D. Moycae* copioſior, in fundum ſubſederat.

Experimentum IV.

Quinquaginta libras medicas *aquae ſuperae A.* in vitro aperto leni calore euaporando expoſui. Tota mole ad viginti circiter vncias redacta, reſiduum vinaceo-flaueſcens, terreas particulas deponere coepit; cum acido ſachari nunc apparuit terra calcarea admixta; opalinus color a ſolutione argenti intenſior et puluiſculus violaſcens praecipitatus fuit. Ad reliqua reagentia non magis mutatum eſt, quam aqua cruda (Exper. III.) Terra filtro ſeparata, et reſiduum a plenaria euaporatione fuſceſcens, ſquamuloſum, granorum quadraginta quatuor pondus aequabant.

Experimentum V.

Hoc reſiduum

1. in aëre ſubhumeſcit;

2. feu-

2. feruida aqua edulcoratum, quatuor grana amisit et terrae flauescentis 40 grana praebuit.

Hanc terram, 1. cum effluescentia omnem soluebat acidum nitri; 2. Solutio alcali phlogisticato addito caerulea facta est;

3. eadem a solutione salis tartari terram puram calcaream, albam praecipitem dedit.

Quod a residuo lotione secesserat, erat extractum mucilaginosum vegetabile, pondere quatuor granorum.

Aqua infera B. omnino eodem se modod habuit, easdem materiae residuae proportiones dedit.

Verum ex *aquae littoralis C.* libris quinquaginta, residui prodierunt quadraginta septem grana, in quibus terrae calcareae, vestigio martiali foetae quadraginta duo grana, et quinque grana extracti lubrici vegetabilis fuere.

Quinquaginta librae *aquae Moycanae D.* residui praebuerunt quadraginta nouem grana, in quibus quadraginta tres calcis et 6 extracti vegetabilis inueni.

Ex his sequitur, aquam Neuae in genere esse puram, limpidam, leuem, sapidam, siue potius saporis expertem, tenuem, diu sine corruptione asseruabilem, et parum admodum heterogeneis particulis inquinatam; continet nempe, in libra, minus grano vnico terrae calcareae; in quinquaginta scilicet libris quadraginta, ad quadraginta tres grana; et quatuor ad

ſex grana extracti mucoſi in eadem quantitate; cum veſtigio perexiguo martis.

Cel. *Model aquae Neuae ſuperae* ſeptuaginta grana reſidui obtinuit in eoque ſexaginta octo grana terrae, quam *aquatilem* (Waſſererde) appellat, et tria grana extracti vegetabilis reperit. Videtur autem reſiduum, quod calcinatione deinde ponderis inſignem proportionem amiſit, non ſatis exſiccatum fuiſſe.

Extractum vegetabile paludoſum quod aqua Nevae largitur, rarius in aquis occurrit. Neua illud forſan extrahit e ratibus et trabibus, quibus paſſim copioſe obtecta eſt, et per defluvia paludum et ipſius vrbis recipit. Forſan huic extracto etiam animale gluten admixtum eſt, quod defluuiorum natura, et odor extracti vſtulati veroſimile reddunt. Et quamuis proportio huius extracti perexigua ſit (vnius circiter grani in 10 libris) attamen in eo praecipue, et in aëris priuatione quaerenda eſſe videtur ratio aegritudinum, quas aduenae a potu aquae noſtrae vulgo experiuntur. Aquae fluuiatiles, teſtante Cel. *Thouvenel*, qui plurimorum fluminum Galliae aquas tractauit, etiamſi heterogeneis principiis minus, quam fontium aquae foetae ſint, tamen ſanitati minus, quam hae conducunt (Cf. Frantz medicin. Polizey Vol.) Tempeſtatis ſubita mutatio Petropoli effectum aquae augere quoque poteſt. Sed haec non mea ſunt; volui tantum chemica principia aquae Neuae noſtrae extra dubium ponere

---

Aqua puteorum in hortis et cellis huius vrbis ad vnam alteramue orgyam effoſſorum, vere eſt paludoſa ſeu collectus ſupra

ſupra argilloſum ſtratum, per totam planitiem, in qua vrbs eſt condita, extenſum, paludoſi ſuperioris ſoli ſudor.

Haec aqua 1. coloris eſt luteſcentis turbida, odore et ſapore nauſeoſa; quiete euadit foetidior et ſedimentum mucoſo-terreum deponit, ſine limpiditatis incremento. Calida tempeſtate etiam vermiculos generat.

2. A ſolutione ſalis tartari, ſachari ſaturni, et argenti turbida euadit et praecipitatum praebet cineraſcens. Cum tinctura gallarum fuſceſcit.

3. Deſtillatione prima aquula admodum foetido volatili odore praedita eſt. Suppoſita tinctura Heliotropii euidenter rubeſcit.

4. Reſiduum quinquaginta librarum euaporatae aquae putei in Inſula Baſilii cellaris, hauſtae menſe Iulio, referebat magma fuſcum et curioſiore analyſi praebuit.

a. terrae calcareae centrum cum 10 grana.

b. terrae argilloſae quindecim grana.

c. ſalis mirabilis Glauberi viginti octo grana.

d. ſalis communis centum et quadraginta duo grana.

e. extracti mucilaginoſi nigricantis ſicci ad trecenta grana; hoc vero extractum euidenter oleoſum, oleo turfae imbutum eſt; vſtulatum fumat et animalem odorem ſpargit a reliquiis inſectorum (niſi a latrinis) oriundum. Maximam partem tamen vegetabilis eſt indolis et cine-

res largitur gryſeas, ſalis alcalini vegetabilis ſex grana praebentes.

f. producta omnia martiale principium produnt.

g. acidum No. 3. indicatum videtur hic originis eſſe vegetabilis e turfacea et paludoſa terra collectum.

Vſus huius aquae internus hominibus pariter et animalibus nauſeoſus aeque ac ſanitati noxius neceſſario eſſe debet. Attamen pigri e plebecula homines et a flumine longius degentes eandem ſaepe, praeſertim pro potu animalium adhibetur. Magis vtilis eſt ad irrigandos hortos et parandum caementum murarium, in quo etiam aquam fluuiatilem puram vincit.

MARI-

MARINA VARIA
NOVA ET RARIORA;

descripsit
P. S. PALLAS.

Conuent. exhib. d. 5. *April* 1787.

Multa et varia Zoologica in Aduersariis inuenio, quae temporis et otii penuria publici iuris facere diu prohibuit. Haec quoque nunc succesſiue *Nouis Actis Academiae* inſerere animus eſt, et breuiter quidem, prout tempus permittit, absque commentis deſcribam. Hic primum Nereides varias, tanquam auctarium ad illuſtratas quondam in *Miſcellaneis Zoologicis* (*Hagae com.* 1766. *editis*) Aphroditas, dein varia marina ex oceano orientali allata et Aſteriam ſingularem maris americani proponam.

I.
Nereis aphroditoïs.

Tab. V. fig. 1. *ad* 7.

Corpus ſubſeſquipedale, craſſitie infra minimum digitum, antice teretius, retrorſum lente adtenuatum ad calami cygnei molem, annuloſum, teres, ventrali latere (*fig.* 1.) depreſſiuſculum, convalle longitudinali, obſoletiſſima exaratum.

Segmenta 148. vel vltra; priora et poſteriora ſenſim longiora. Segmentum ſingulum vtrinque inſtructum *pedunculo* (*fig.* 6.) carnoſo, compoſito e *papilla* a ventrali latere adnata, producta, obtuſa et *mammilla* medio exſerente *penicillum* exiguum, e pilis gryſeis, retractilem, et exſertam *ſetam* nigram rigidam. *Cirrhus* ſupra ſingulum pedunculum craſſus, in dorſum proſtratus, ad cuius baſin ſuperius enaſcitur branchia.

Branchiae in octo prioribus ſegmentis nullae, tribus proximis ſimplices cirrhiformes, ſequentibus ſenſim maiores (*fig.* 7.) vno verſu pinnatae, pinnulis linearibus, dorſoque varie acclines. Quantum hae branchiae verſus poſteriora creſcunt, tantundem cirrhi decreſcunt.

Caput animalis (*fig.* 2. 3. 4. 5.) refert praeputium truncatum, margine ſubcrenatum, baſi annulo transuerſali tantum a dorſo, *cirrhis*que binis craſſis, diſtantibus, ſubtus vero crena marginis et inciſura longitudinali notatum.

Os intra praeputium, *laminis* a ventrali latere (*fig.* 3.) binis in oeſophagum longitudinalibus, antice triangulo nigro in praeputio prominentibus inſtructum. *Palatum* elongatum in maſſam carneam, praeputio ſupra adnatam, eiusque cauum explentem (*fig.* 2. 3. *a. a.*), bilobam, ſuperne intra praeputii marginem inſtructam *cirrhis* maximis quinis vel ſenis.

Color animalis in liquore ſeruati gryſeo-cinereus, epidermide irideſcente obnebulatus.

Habui ſpecimina ex Oceano Indico, Ceylonam adluente, et forſitan in omni calidioris plagae mari datur. Figura a naturali magnitudine imminuta eſt.

II.

II.

Nereis ebranchiata.

Tab. V. fig. 8 — 10.

Corpus pedale, craſſitie calami ſcriptorii, annuloſum, teres, lumbriciforme, vtraque extremitate, at inſignius verſus poſteriora adtenuatum, bifariam pinnatum *pedunculis* ſingulo ſegmento vtrinque ſingulis (*fig.* 8.).

Segmenta corporis 269. ſingula a ventrali latere medio puncto impreſſo notata, prima et poſtrema ſenſim minora; vltimum crenatum, ani aperturam coronans.

Pedunculi cylindrici, breues, apice transuerſim bifidi, portione antica papillari, poſtica multo longiore, ſubulata; inter quas enaſcuntur pili rariuſculi, gryſeo-aureoli, rigidi (*fig.* 10.).

Capitis *praeputium* conſtat annulis binis (*fig.* 9.) pedunculorum apparatu carentibus, ſubtus vnitis et crenatis.

Os contractum rugis binis et lobo palati globoſo prominulum.

Branchiae cirrhiue capitis in hac ſpecie plane abſunt.

Color gryſeo-fuſcus, cuticula irideſcente. *Ventriculus* exilis, carnoſus.

Haec quoque ſpecies e mari indico adlata fuit, ſed datur affinis in mari germanico, coeruleſcens.

III.

III.

Nereis lamellifera.

Tab. V. fig. 11. *ad* 17.

Corpus in mari germanico ad ſummum bipedale, in Indico ſpecimine bipedale, craſſitie pennae gallinaceae, annuloſum, teres, antice parum, verſus poſteriora lentiſſime adtenuatum, vtroque latere lamelloſo-pedunculatum (*fig.* 11.).

Segmenta numero incerta, in noſtratibus inter 200 et 300, in ſpecimine exotico vltra 550, vniuerſa a ventrali latere inſigni foſſula impreſſa.

Pedunculi (*fig.* 18.) compreſſi, ſetulis flauicantibus praecipilati, ſubtus aucti *foliolo* (*a. b.*) ſemilunato, apice libero. Ad dorſum ſingulo pedunculo inſidet *foliolum* aliud maius, ſemicordatum, ſubtiliſſime venoſum, apice reflexum. Foliola pedunculorum et dorſalia confertim retrorſum imbricata, latera totius animalis velut laxe ſquamoſa fiſtunt.

Caput inſtructum *cirrhis* quatuor parium, quorum duo a dorſo, remotiora, maiora, vnum vtrinque verſus latus, (*Fig.* 12. 13. ex indica, 14. 15. aucta magnitudine ex atlantica, *A A* naturali mole ex eadem). *Palatum* prominens papilla quatuor mucronibus carneis ſtellata (*fig.* 14. 15. *a a.*), ſub qua, compreſſo vel macerato poſt mortem animali, protruditur *oeſophagus* (*fig.* 16. 17. *c c.* aucta *B B.* naturali magnitudine) extrorſum ſubuerſus, lineis longitudinalibus parallelis, dentatis duodecim, ſeu ſeriebus punctorum muricata.

Supra papillam oris quadriſpinoſam, *puncta* duo nigra diſtincta (*fig.* 12. 16.) pro oculis forte habenda.

Color

Color Nereidis europaeae recentis flauescente-gryseus, pallidus et ob epidermidem irideſcens; in dorſo lituris ſingulo ſegmento ſingulis, viridicantibus, obſoletis diſtinctus. Foliola lateralia margine fuſceſcunt.

In multis ſpeciminibus poſtica corporis extremitas abrupta reperitur, et in non paucis teneriorem tenuioremque caudam e praeruptae partis vulnere repullulaſſe obſeruaui; vnde Nereidi noſtrae, et congeneribus forte omnibus, facultatem corporis amiſſam partem reſarciendi datam apparet.

Reperitur haec ſpecies, vaga inter vegetabilia et quisquilias marinas, in Mari Indico, mediterraneo et ſeptentrionali, tantum magnitudine diuerſa. Videtur illam *Plancus* indicaſſe.

IV.
Nereis lumbricoides.

Tab. V. fig. 19. 19 *.

Hoc nomine mihi venit Lumbricus marinus *Linnaei*, qui omnino quidem affinitatem genericam, inter Nereides et Lumbricos, etiam alias inſignem complet, attamen propter branchias ſetis dorſalibus additas mihi potius priori generi adnumerandus videtur.

Notum eſt, hunc vermem, vt Nereides etiam aliquae faciunt, inſtar Lumbricorum in fundo maris arenoſo, praeſertim vadorum, deliteſcere et recedente aeſtu gyros excrementorum e ſubtiliſſimo ſabulo conſtantium ſupra canalem, in quo latent, egerere. Notum etiam, a piſcatoribus e profunditate ſeſquipedali et vltra effodi ad ineſcandos hamos capiendis Gadis et Pleuronectibus deſtinatos. Anglis ideo nomine *Lugs* vel

Logworms ſunt notiſſimi. Summa magnitudo, qua occurrunt, eſt octo ad decem pollicum, et digiti minoris craſſities. Icone noſtra (*fig.* 19.) minorem expreſſi.

Corpus molle, teres, antice craſſius, ſubadtenuatum, convexe annuloſum, vulgo ſemipedale, craſſitie calami cygnei vel antice minoris digiti.

Os laxum, truncatum, labio papillis conicis mollibus conſertis obſito, quae et in oeſophagum, pro lubitu vermis exſerendum, continuantur.

Annuli corporis connexo-turgiduli, granuloſo-ſtriati, prominentiores circiter 19. aequidiſtantes, iisque interiecti vbique quaterni, niſi inter duos primos, vbi tantum bini (*fig.* 19.*).

Faſciculus ſeu penicillus ſetularum ſubaurearum ſetaceus vtrinque ad dorſum in ſingulo annulorum prominentiorum, adeoque 19. parium; quorum ſeptem priora ſimplicia, reliqua poſtice ſtipata *branchiolis* ſeu cirrhis pinnatis (*fig.* 19.*). Hae branchiae interne et poſtice ad penicillos enaſcuntur, longiores vbique 2. et aliquot minores, lineari adtenuatae, pinnatae pinnulis confertis, ramoſis.

Annuli prominentiores, praeſertim poſteriores, ad latera ſubbilabiati, vt quaſi pedunculorum carneorum in Nereidibus veſtigia exprimant.

Poſtica corporis extremitas aequaliter annulata, truncata; *ani* apertura terminali.

Color animalis recentis quaſi cutis quorundam Nigritarum, carneus, nigredine obductus. Branchiae albidae.

V.

V.

Nereis chryſocephala.

Tab. V. fig. 20. 20*.

Tubulos in fundo maris Indici colit, et eſt affinis *Nereidi tophigenae*, quae Sabella alueolata *Linnaei.*

Corpus molle, continuum, adtenuatum, vtrinque criſtis transuerſis carnoſis, confertis, lamelloſum (*fig.* 20.). Latus dorſale (B.) latius, planiuſculum.

Pedunculi ſeu criſtae transuerſae lateraliter ſubacuto limbo prominuli, ad ventrale latus producti atque terminati *mucrone* carneo, ſubulato, antrorſum incuruo, et ante mucronem *penicillo* pilorum ſubtiliſſimo, exalbido-aureolo (B.).

Ad dorſum pariter producti pedunculi terminantur *cirrho* maximo, craſſo, dorſo acclini, in prioribus minore, poſticis ſenſim exiliore (*fig. A.*).

E criſtarum lateralium vtrinque ſecunda, tertia, quartaque poſtice oritur *brachiolum* ſeu proceſſus carneus planus, retrorſum adpreſſus corpori, margine terminali recto, ciliatus ſetis aureis, parallelis, circiter nouem. Horum brachiolorum priores minores ſunt.

Caput animalis diſcretum a corpore, truncatum, a dorſali latere (*B.*) integrum, conuexum, a ventre profunde exſciſſo-excauatum (*A.*), extremo vertice truncato, biſulco (*fig.* 20*.). Sciſſurae limbi margine et intus *cirrhis* numeroſiſſimis, confertis, capillaribus ciliato-hirti (*A.*). Truncati

verticis diſcus coronatus *paleolis* aureis (*fig.* 20 *.) confertis, bifariam diſpoſitis, *exterioribus* latioribus, acutis diuergentibus; *interioribus* introrſum et verſus ſciſſuram directis, longioribus ſetaceis. Sub corona paleolarum exteriore *limbus* carneus crenatus (*fig.* 20. *B.*).

Os infra ſciſſuram ſeu ſinum capitis, longitudinaliter conniuens, poſtice cinctum *ruga* ſemicirculari, crenata (*B.*).

Poſtica corporis pars producta *inteſtino* cylindrico, fere pollicari, contorto, quod, ſaltem ex parte, naturaliter in viuo quoque verme exſertum eſſe videtur.

Longitudo vermis, quem deſcripſi, erat quatuor circiter pollicum.

VI.

Serpula ſpirillum.

Tab. V. fig. 21.

Vulgaris haec in Fuco veſiculoſo maris germanici ſerpula, quoad teſtam notiſſima, meretur etiam ipſa deſcribi, quippe elegantiſſima. Obſeruaui viuam anno 1767, ad Trauae oſtium aduerſo vento retentus, quum Roſſiam peterem.

Animalculum intra tubum lumbriciforme, rubicundum, antice truncatum (*A a.*).

Branchiae octo, ab vtroque ſcilicet latere quatuor, ciliatae ſeu pinnatae ſilis vtrinque circiter duodenis, tenerrimae, ſubrecuruatae vbi animal illas exſerit (*A. B.*).

Os

Os ſpathulaeforme (*A B. b b.*), extremitate rubicundum, ſecundum ſpiram curuatum, apice vnguiformi, vix excauato.

VII.

Limax tetraquetra.

Tab. V. fig. 22.

Limacem huncce marinum e Curilis inſulis accepi, vbi crudum coctumque edunt et *Tochui* appellant incolae. Paulo maiores icone dantur, et ſiccatae formam bene ſeruant. Poſſet ad *Linnaei* mentem Doridis ſpecies videri; mihi vero neque Dorides, nec Laplyſia *Linnaei* ſatis a Limacibus genere diſtinguendae videntur.

Corpus huic Limaci (*fig.* 22.) quadrangulare, poſtice acutum, anterius obtuſum, totum coriaceum, planilaterum. *Latus dorſale* cartilagineo coriaceum, grandinoſo-inaequale, angulis carunculato-hiulcis; *laterales* facies laeuiores, molliores-que, dextrum orificio reſpiratorio (*E.*) perforatum. *Inferior* facies pedem limacinum pulpoſum, vndique ſubmarginatum refert.

Os in extremitate anteriore (*C.*) ſupra pedem oblique truncata, vnilabiatum, longitudinale, cinctum rugis aliquot concentricis, infra deficientibus. Supra has imminet limbus ſubreflexus, vtrinque in laciniam lacero-dentatam (*A.*) productus, pone quas forſitan ad *B.* vtrinque tentaculum exſeritur, quod tamen deprehendere in ſiccatis, denuo emollitis haud potui.

Intus areae os ambienti ſubiacent *laminae* binae corneo-oſſeae (*fig.* 22 *. *A.*) luteae, extrorſum conuexae, laeuiſſi-

viſſimae, interiore margine craſſiore intra labia oris prominulae dentium loco.

Interiora animalis, propter duritiem et conglutinationem accurate ſcrutari haud licuit; quae ex analogia diuinari fere potuerunt, haec ſunt:

Poſticam cauitatem corporis, totius animalis facile vltra dimidium, occupabat *parenchyma* hepatis compactum, luteum.

In anterioribus, a ſiniſtris *glomus* anfractuoſus compactus iacebat, qui tenui canali ab ore ortus, ſubaequali craſſitie canalis pergebat in gyros contortuplicatus, et intus parenchymatoſus videbatur, ſeparari enim membrana vix potuit. Extrema pars huius inteſtini, quod 5″. circiter aequare videbatur, inter lactes immergebatur et verſus orificium magnum dextri lateris (*fig.* 22 *. *B.* 22. *E.*) tendebat.

Ad dextrum latus, anterius, ſtatim pone caput, poſitus erat fibris adnatus *folliculus* vacuus, fibris carnoſis praeditus, introrſum rugoſe retractus mole fabae, in cuius fundo *corpus* carnoſum, valde fibroſum, conico-acuminatum, laeue, folliculo adnatum latebat, quod externo amplo orificio (*B a.*) exſeri poſſe videbatur.

Pone hunc folliculum *corpus* inſigne lobato-pampiniforme, parenchymatoſo-lacteum, conglomeratum, quod in ductum collectum exiliori orificio (*B. b.*) extus hiat.

Pone ſpiraculum *B a.* ad ipſam cutem laterum ampullula mole piſi, miniacea maſſa, ſubtiliſſimum arenae puluerem ad tactum aemulante, repleta.

Inter

Inter folliculum rubrum, corpus lacteum et maiorem folliculum compreſſus interiacet *folliculus* alius minor *triqueter*, e craſſiuſcula membrana et vt videtur glanduloſa factus, piſi capax, ipſam ad cutem ſeſſilis, vacuus, exteriusque hians orificio proprio (*B. c.*).

Inteſtinum ad ipſum quoque orificium *b.* videbatur inſertum, intra extimam eius oram, vt extus hocce orificium tantum ſimplex appareret.

Minutiora diſtingui haud potuere, neque formae viſcerum bene determinari.

Oris apparatus inſignis: ſub cute externa *lamina* carnoſa ouali, medio fiſſa, vti externa apertura. Ab hac facile ſecedebant laminae oſſeo corneae (22 *. *A.*) quarum cauum poſtice carne larga ſeu robuſtis muſculis erat repletum, inferior pars fibris firmis pedi limacino adnata.

VIII.

Aſterias oligactes.

Tab. VI. fig. 23. *A. B.*

Ad Aſterias ophiuras pertinet, omniumque huius affinitatis maxime abnormi proportione gaudet. Adhaerentem inveni Gorgoniae cuidam ſimplici (Milleporae alcicorni innatae) quam Curaſſoa adlatam quondam miſit Illuſt. *Baro à Rengers.* Radiis intortis Gorgoniae implicata haerebat.

Corpuſculum duriuſculum, exiguum, magnitudine ea quam figura exprimit, (*fig.* 23. *A. B.*), pentagorum, angulis truncatis;

catis; *ſuperiore* facie (*B.*) medio impreſſa, ſtellataque coſtis rotundatis denis, per paria verſus angulos truncatos ſubparallelis, extrorſum craſſeſcentibus; *inferiore* facie plana, *ore* in medio rimis linearibus diſciſſo, ſtellato et ad ortum radiorum *fiſſura* vtrinque ſubobliqua inciſa.

Radii proportione corporis enormi longitudine ad 15. pollices et vltra explere viſi, quantum menſurari filo potuere, tereti-filiformes, lentiſſime adtenuati, compoſiti *articulis* creberrimis, cruſtaceis, oſſeis, conſiſtentia et colore vt in Aſteria Meduſae. Singuli articuli ad latus ori reſpondens inſtructi pedunculis ſeu *ſtylis* binis mobilibus, ipſo articulo vix longioribus, approximatis.

Color totius albo-flaueſcens, conſiſtentia dura, cruſtacea.

IX.

Lepas carioſa.

Tab. VI. fig. 24. A. B.

Hanc teſtam ſingularem, admodum craſſam in hoc genere et ſolidam, e Curilis inſulis accepi. Alba eſt, magnitudine exacte, quam figurae exprimunt, (A. *a* ſuperiore, B. ab inferiore latere delineatae). Admodum depreſſa eſt, margine ambitus extenuato, interiore circa orificium craſſo, inaequali. Superficies exterior ſulcato-carioſa; interior inaequalis, laeuis, obſoletiſſime in laminas coalitas diuiſae.

X.

Pholas Teredula.

Tab. VI. fig. 25. A. ad D.

In littore maris germanici ad Belgium aliquando reperi fruſtum ligni quercini, adhuc bene duri, quod innumeris huius Pho-

Pholadis teſtis erat perforatum, ſimul Sertulariis obductum, quibus remotis, minutiſſima patebant foramina, quae ſubito dilatato, ſed breui cauo in lignum penetrabant incerta directione (*fig.* 25. *D.*). Vacua alia erant caua, teſtulas tantum continentia, nulla intus viſibili cruſta calcarea obueſtita, attamen ab infuſo ſpiritu nitri efferueſcentia. In aliis integra et viua aderant animalcula quae hic deſcribo, teſtulis ſuis Teredinem naualem, ſed breui corpore Pholadem ita mentientia, vt etiam hinc affinitas ſumma, iam ab *Adanſonio* indicata, inter Teredinem et Pholades appareret.

Fig. 25. *a.* refert Pholadem Teredulam magnitudine naturali, quae cauis ligni, cuius fragmentum, naturali item magnitudine, ad *D.* fiſtitur, inhaeſit. *A.* Refert animal aucta mole, vbi teſtae, et corpus dactyliforme, ſutura granulata, ſuſca longitudinaliter inſignitum, apparet; *B.* teſtas albas ab animali diſiunctas a baſi, et *C.* vnicam ab interno latere, vbi etiam dens *b.* a cardine introrſum exſertus conſpicitur, qui in aliis Pholadibus pariter obſeruatur.

Ne quis confundat, addo: etiam in mari germanico reperii ſaepe ligni putridi fragmenta maiora, varie perforata brevibus canalibus, ſed paulo maioribus, quibus Mya quaedam elegantiſſima continetur. Pholas vero noſtra in exilibus ligni fragmentis, ſaepe in ramulis pollice non craſſioribus, ſed ſemper in ligno putredine nondum confecto nidulatur.

XI.

Chiton amiculatus.

Tab. VII. fig. 26 *ad* 30.

Maximus eſt omnium huius generis qui hucusque innotuerunt, quippe qui ſaepe in longitudinem ſex pollicum an-

glicorum (*Stellero* obſeruante) excreſcit, mihique ipſi inter minores plures, quadripollicaris, licet ſiccus, e Curilis inſulis adlatus eſt.

Forma ſiccati, Chitones vulgares refert; ſed oſſicula ſcuti (*fig.* 26.) obducta corio cartilaginoſo, extus ſcabro et ſubverrucoſo, continuato que margini vndique ſcutum ambienti, craſſo, arguto, cartilagineo, ſubtus plano, laeui.

Pes ſubtus (*fig.* 28.) lanceolatus, circumferentia ſcuti multo minor, et fere triplo anguſtior, poſtice ſubacutus, antice obtuſus. *Os* in corpuſculo plano, calcis equinae formam referente, a pede diſtincto (*a*).

Inter pedem et marginem ſcuti foſſa ambiens impreſſa, intra quam fluctuat *limbus* ſcuto interius adnatus (*b b.*), pectinatus barbulis mollibus, compreſſis, confertis, branchias piſcium ruditer referentibus, ſimilique forſitan functioni deſtinatis.

Scutum corio denudatum (*fig.* 27.) et a circumadnato margine cartilaginoſo ſeparatum, ſeu ſceleton animalis, conſtat oſſiculis octonis albis, lapideae indolis, fragiliſſimis, imbricatis; quorum primum (*fig.* 30.) forma fere vngulae equinae ſeu patellae dimidiatae, reniforme, margine antico leviter crenatum et ſupra per ambitum ſubtiliſſime ſtriatum; intermedia (*b. b.*) 2 ad 7, quorum maximum quartum, quaſi e duobus planis orbiculatis compoſita, angulo obtuſo coadunatis (*fig.* 29.), margine praeſertim poſtico extenuatis integris, diſco et ſymphyſi incraſſatis, ſupraque transuerſa inſcriptione obſolete turgeſcente inſtructis.

His

His omnibus 1 — 7. in ipſo ſinus poſtici angulo (*c. c.*) foſſula pentagona, argute marginata, poſtice truncata.

Officulum vltimum (*d.*) angulatum, quaſi e duobus pentagonis compoſitum, poſtice excitum, foſſulaque ſymphyſeos a margine remota diuerſum.

Stellerus de Chitone noſtra haec habet: „ Circa portum D. Petri et Pauli et Lopatka promontorium abunde eiicitur a fluctibus oceani; comeditur, nec mali ſaporis eſt, „ corio cartilaginem Sturionis, ſubſtantia interna vitellum oui „ forma, colore, et ſapore referente. Camtſchadalis vocatur „ ſua lingua *Keru*. Dorſum luteſcens, multis papillis rubris obſitum; ſubtus glaber luteſcens. Fimbriae pectinatae carneae „ branchiarum piſcium ſimiles „.

Mitella, Balani ſpecies tertia verrucoſa *Sebae thef. vol.* II. *tab.* 61. *fig.* 5. *p.* 61. eſt Chitonis ſpecies corio itidem verrucoſo obducta, noſtrae in eo ſimilis, quod ſcuta non appareant. Locum natalem non indicat Seba.

XII.

Helix coriacea.

Tab. VII. fig. 31 *ad* 33.

Solum fere exemplum Teſtacei coriacei e Curilis inſulis accepi, vbi inquilinis *Tſchoma*, Camtſchatice *Chonochtur* appellatur. Magnitudinem ſummam, quam vidi, icon (*fig.* 31.) exprimit; ſed dantur maiores. A Camtſchadalis hae potiſſimum teſtae pro cymbis habentur quibus Mures oeconomos migrantes maris ſinus transfretare fabulantur, vnde Ruſſis hae teſtae *Baidarki* vulgo audiunt.

Teſta, cum humet, cartilagineo cornea, vel molluſce corneola, ſicca membranaceo-cornea, luteſcens, ſubpellucens, dimidiam Bucardii teſtam fere referens, paulo irregulari circumſcriptione ouata, gibba, hinc vmbilicata *ſpira* ſimplici (*a.*), margini ibidem ventricoſe collecto (*b.*) proxima, impreſſa, quaeque interius, praeſertim in iunioribus (*fig.* 32. 33.), tenui calcarea cruſta obducitur. Circumferentia (*c. c. c.*) effuſa, et ad dextram ſpirae margo leuiter extrorſum flexus. Superficies tota in iunioribus ſtriis circularibus, margini effuſo parallelis, in maiori obſoletis rugis annotinis imbricata, verſus marginem hirſutie quadam aſperata.

Varietates recenſet *Stellerus* ſequentes: „*Auris marinae* „(ſic teſtam vocat) varietas, turbine dextrum latus ſpectante. „— *Eadem* cuius turbo ſiniſtrum latus ſpectat. — *Eadem* mem„branacea, ſpadicea, cuius primum ſuperioris teſtae rudimen„tum necdum abſolutum. — *Eadem* membranacea, virides„cens ac diaphana. Ochoti et ad Bolſchaja fl. oſtium ejici„untur copioſe et a Laris auide deuorantur.„.

XIII.

Aſcidia ſquamata.

Tab. VII. fig. 34. — 37.

Simile huic noſtro Curilico Molluſcum nomine Holothuriae ſquamatae in *Faunae Danicae Faſc. I. Tab. X. fig.* 1. 2. 3. delineauit *Müllerus*, ſed multo minus. Specimina noſtra, copioſe ſatis miſſa, ſed ſiccata, circa os etiam reliquias mucoſas tentaculorum referebant, quae tamen, aqua macerata, nullam organicam texturam prodiderunt. Adfuiſſe ſimiles Norwagicae *Mülleri* veroſimile eſt; et tamen mihi vtrumque molluſcum potius

tius ad Aſcidias, quam ad Holothuria pertinere videtur, licet tranſitum ad haec efficiat.

Animal, ſi poëtico genio indulgere velis, Sirenum vel Nereïdum quaſi mammas ſquamoſas refert. *Magnitudinem* ſummam ſpeciminum viſorum icon exprimit.

Baſis oblonga, coriacea, laeuis, inſtar pedis Actiniae plana, colore coccineo, etiam in ſiccatis, rutila.

Corpus non multo magis gibbum, quam vt inſignem mammarum foeminearum tumorem aequet, ſupra conuexe bituberum, altero tubere paulo maiore, vbi os et tentaculorum veſtigia, vtroque perforato.

Totum corpus tegunt *ſquamae* lapidoſae, fragiles, ſubrotundo quadratulae, ſurſum imbricatae, quarum diſpoſitio ex icone patet. Squamas immerſas connectit et obueſtit *epidermis* mollis, hinc inde inter ſquamas *callis* minutis adſperſa, ſaltem in maximis. *Calli* maiores ſeu ſquamae imperfectae, ſenſim imminutae, circa orificia tuberum.

Interanea ſingularis ſtructurae, ſed in ſiccatis, maceratione emollitis ſpeciminibus imperfecte ſucceſſit anatome. Cavitas interna exhibet primo *muſculum* circularem, marginem teſtudinis ſquamatae legentem, a quo fibrae radiatim ſecundum teſtudinem in dorſum eiusdem conuergunt. *Fibrae* aliquot inter orificia longitudinales.

Orificium a. ducit in folliculum tympaniformem (*fig.* 35. *c. d. e.*), rubicundo vel ruberrimo magmate plenum, cuius in-

feriorem marginem coronat series *officulorum* (*e e.*) concatenatorum, e lapidea fragiliſſima ſubſtantia factorum, quae (*fig.* 37.) tricruria ſunt, vno crure truncato verſus os directa, duobus inferioribus inter ſe concatenata (*fig.* 36.). *Muſculi* quinque (*d. d. d.*) inſignes, circa hoc tympanum ſeu ventriculum inſerti, illum fundo teſtudinis adligant.

E medio diſci officulis cincti pergit *inteſtinum* (*f.*) magmate gryſeo plenum, flexuoſum, inſeriturque *veſiculae* (*g.*) vacuae, intus glabrae, quae altero orificio animalis (*fig.* 34. *b.*) reſpondet, et circa quam corpus tubuloſo fibroſum haeret, quod ſcrutari haud potui.

Ventriculi ſtructura vtique Actiniis ambulatoriis ſeu Holothuriis affine reddunt hoc animal, niſi quod plano laterali affixum haereat, duobus orificiis ſurſum patens.

XIV.

Aſcidia aurantium

Tab. VII. fig. 38.

Cum praecedenti complura ſiccata ſpecimina etiam huius ex inſulis Curilis adlata ſunt.

Magnitudo ſaepe pomi aurantii maioris. *Forma*, praeter baſin truncatam teſtis lapillisque inſidentem et papillas oſculiferas, ſubgloboſa.

Corium externum in ſiccatis paſſim in magnas rugas crispatum, naturaliter aequabile, tenaciſſimum, rigidiuſculum, vix

vngue

vngue craſſius, extus totum *punctis* duriuſculis, diſtantibus ſcabratum.

Papillae in vertice ſphaerae binae cylindraceae, rugoſae, altera maior, vtraque orificio cruciatim diſſiſſo peruia.

Intra cauum corii continetur *follis* ductibus duobus carnoſis orificiis papillarum inſertus, conſtans ſtrato fibrarum extus circularium interioreque groſſiorum longitudinalium, in discum baſeos tendinoſum, circularem conuergentibus. Hic follis ſeu *ventriculus* facile integer a corio ſecedit et enucleatur, intus vacuus, aquam marinam recepturus, ſtipatus adnato *viscere* parenchymatoſo, in anfractus inteſtiniformes efficto, flaveſcente, a baſi per latus arcuato-adſcendente.

Color extus coccineus.

XV.

Aſcidia globularis.

Tab. VII. fig. 39. 40.

In littoribus vadoſis arena ſubtili ſtratis maris hyperborei ad Caraę ſinum copioſa collegit ſpecimina Amiciſſ. *Sujef*, quum an. 1770. oram iſtam glacialem adiit. In ſpiritu frumenti optime conſeruari potuit, licet molle corpus.

Maximae Ceraſum maiorem aequabant. *Corpus* ſimpliciſſimum, ex ouali globoſum, ſemipellucidum, glabrum, ſubtus pedunculo breuiſſimo ſupra arenam vel lapillos adfixum, ſupra pertuſum oſculis binis, diſtantibus, vix quidquam prominulis.

Corium

Corium externum epidermidis humanae craſſioris, diu maceratae ſimile, cineraſcente-pellucens, extus ſubtiliſſime punctato ſcabrum et plerumque arena ſubtili adglutinata confertim obſitum.

Diſſecto corio *intus* apparet *faccus* ſeu ventriculus (*d. b. c. c. a. d.*) forma externo inuolucro ſimilis, ad marginem pedunculi gemino ligamento (*c. c.*) inſertus et ſupra orificiis (*d. d.*) adnatus, caeterum vndique ſolutus; in quo *fibrae* diſtinctae paulum inter ſe diſtantes, transuerſae, neruique longitudinales, magis inter ſe diſtantes, paralleli, interiores apparent. Superficies interior facci *circulo* verſus orificium ſtriato laeui, caeterum plicis longitudinalibus, mollibus rugoſa, quas efficit interior tunica villoſa. Ad fundum facci, inter orificium marius et pedunculum, inter externam fibroſo-neruean, internamque tunicam plicatam, latet *viſcus* (*a.*) depreſſum, totum globulis minutis, magnitudine arenulae, albis refertiſſimum, quod certe ouarium eſt, neque in omnibus adeſt; in minoribus enim ne veſtigium quidem eius vidi. Viſus mihi ſum videre porum exiguum ad ipſum pedunculum externi inuolucri, cui alterum e ligamentis baſilaribus ventriculi ſeu folliculi interni adhaeret, quique forte ouiductus eſt.

Ab altero latere, inter tunicas, latet *viſcus* (*b.*) parenchymatoſum, luteſcens, cylindraceum, vtrinque obtuſum, quod hepatis vel pancreatis analogum diceres, quodque nulli deeſt.

In facco nunquam heterogenei quidquam, praeter liquorem limpidum inueni in pluribus diſſectis; vt ſola aqua marina nutriri animal vix dubitem.

Ab

Ab Aſcidio Pruno *Faunae Danicae Icon. XXXIV. fig.* 1. 2. 3. noſtra ſpecies differt pedunculo, forma orificiorum et viſcerum, imo ſubſtantia.

Ex eadem plaga arctici maris adlata mihi ſunt *Ouaria* (*fig.* 40.) membranacea, in diſculum medio perforatum efficta, nigricantis et tenacioris ſubſtantiae, ouulis minutis per ambitum ſcatentia, quae libera ſupra ſabuloſum vadoſi littoris fundum reperta ſunt, et forſitan ad hanc noſtram Aſcidiam pertinent.

COMPLEMENTA VARIA
ACAD. IMPER. SCIENT. PETROPOLITANAE COMMVNICANDA,

AD

CLAR. AC CELEB. *PALLAS*;

Auctore

PETRO CAMPER.

Conuent. exhib. d. 6. Sept. 1787.

Praefatio.

Sceletorum diuerſorum animalium, in primis quadrupedum numerum magnum, in initio ſtudiorum meorum collegi eo, quam maxime, ſcopo, vt Galeni adminiſtrationes anatomicas intelligerem, et ex Anatome comparata Corporis Humani fabricam euidentius inluſtrarem, et facilius. In animalium capitibus vero maximam diuerſitatem obſeruans, tantam eorum mihi comparaui copiam, vt vltra nonaginta in Muſeo meo numerem crania, praeter illa Cetaceorum, Trichechorum, Manatorum, Dugonum etc.

Mechanismo omnium, ac dentium varietate ſtupenda, qua generantur, ac reconditi ſunt, rite examinatis, coepi foſſilia Crania, et oſſa varia vndequaque mihi comparare, vt, quid veteri orbi contigerit, determinarem plenius, et curatius. De Cranio

Cranio Rhinocerotis differens in poſt. Parte Tom. II. Actorum huius Acad. p. 202. Credere nondum auſus ſum, Animallum diverſorum extinctionem, ſeu annihilationem, tamquam Diuinae prouidentiae repugnantem! Hodie vero quam plurima extinctorum ſpecimina, in Muſeo meo reperiunda, et meditationes magis ſeriae perſuaſerunt mihi, ſapientiae Diuinae non repugnare, legem, qua res illas, vel animalia illa definere iubeat, ſimul ac ſcopo primario, nobis incognito, ſatisfecerunt penitus. Conuictus etiam cum maxime ſum, orbem noſtrum variis illis, ac horrendis cataſtrophis fuiſſe expoſitum aliquot ſeculis, antequam homo fuit creatus: numquam enim hucusque, nec in vllo muſeo, videre mihi contigit verum os humanum petrifactum, aut foſſile, etiamſi Mammonteorum, Elephantorum, Rhinocerotum, Bubalorum, Equorum, Draconum, ſeu Pſeudourſorum, Leonum, Canum, Vrſorum, aliorumque perplura viderim oſſa, et eorum omnium haud pauca ſpecimina in Muſeo meo conſeruem!

Operae igitur pretium fuit viuentium oſſa bene cognoſcere, vt foſſilia ad ſua genera ac ſpecies reducere poſſemus. Oſſa non modo, ſed et dentes pleniori examine digna euaſerunt, vt ſpecies aliquot definirentur curatius: Ex inciſiuis enim ſolis aſiaticos Rhinocerotes ab africanis, et Apros aethopicos a ſe inuicem diſtinguere licet. Adſerere ex eodem principio audeo Mammonteum animal extinctum non modo eſſe, ſed nullam omnino habuiſſe cum Elephanto ſimilitudinem! Etiam Elephantos, et Hippopotamos olim giganteos fuiſſe; quemadmodum Bubalos, Alcesque, Vrſosque, giganteos revera extitiſſe vel ipſis ſpeciminibus, vel iconibus fidelibus ad obiecta ipſa a me ad amuſſim Londini factis, euidentiſſime, hoc momento, demonſtrare queo.

Academia Petropolitana, Muſei Brittannici Curatores, ac Viri perplures in litterarum orbe Celebres, inter quos *Hoffmannos*, *G. Hunteros*, *Palierios*, *Pallaſios*, *Burtinios*, *Forſteros*, *Soemmeringios*, *Menkios*, *Banckſios*, *Burkeos*, *Watſonos*, *Vosmaerios*, aliosque nominare licet, generoſitate incomparabili Muſcum meum locupletarunt.

Egregia quoque ſpecimina inprimis ex Weſtphalia mihi adtulit filius meus Adrianus, qui in Gallia ſimiliter multa ex monte martyrum exemplaria pro muſeo meo collegit. Taceo, quae ex monte St. Petri ab haeredibus *Hofmanni* et aliunde emerim.

Theſaurus hoc modo pedetentim collectus indigebat indies pleniore examine, indigebam igitur ipſe neceſſario omnis generis oſſibus rariorum quadrupedum, praeprimis ſi claſſem non modo, ſed ordinem, immo genera ipſa, ac ſpecies animalium determinare vellem, ad quae oſſa illa foſſilia, vndequaque acquiſita, pertinuerunt.

Exemplis iam veritatem hanc illuſtrabo.

De Cranio Biſontis foſſili.

§. 1. Exhibuiſti, Vir clariſſime, Tom. XVII. Nou. Com. Acad. Imp. Scient. Petrop. pro Ann. 1772. p. 576. cranium foſſile Bubali, quod ſuccincta deſcriptione et figuris tribus valde nitidis illuſtraſti, pro ſolita tua prudentia, ſpeciem determinare recuſaſti, dubius ad Bubalum capenſem, an vero ad Biſontem pertineret americanum? Cl. *Voſmaerius* mihi ante aliquot annos dono dederat Bubali capenſis cranium egregium, integrum, ſiccatum: ſed anno praeterito, ex conſenſu Inluſtrium Muſei Brittannici Curatorum, poſtquam rara quaedam petre

trefacta, ad permutanda duplicata, miseram, acquisiui Bisontis Americani cranium, cute similiter ornatum; macerauerat ambo, vt depurata conferre possem cum accuratissimis figuris, quas de hoc fossili cranio, quemadmodum etiam de Vro dedisti.

Animaduerti, praeter descriptionem, in vniuersum fossili cranio et recenti Bisonti conuenientem, lacrymales in ossibus vnguis foueas, quas Bubalus capensis omnino non habet. Frons ipsa Bisontis, et cornuum bases insuper respondent adeo exacte iconibus tuis, vt ouum ouo similius esse nequeat! Fossile cranium tamen minus grande est recenti, quod iterum capensi multo minus est. Nullus dubito, quin specimen, mihi concessum, ipsum id siccatum Bisontis caput sit, quod olim in Museo Brittannico a Te visum p. 601. ib. memorasti.

Mirabar Ill. Pennantium *Hist. of Quadrup. p.* 27. adseverantem, Te non de fossilibus, sed de recentibus egisse craniis, super glaciem ex America allatis; quum euidenter ex toto tenore constet Te fossilia sola collineasse (*).

Praeter lacrymalium foucarum, et cornuum dissimilitudinem in Capensi Bubalo, obseruaui complementa ossium maxillari-

(*) Crania a me descripta in plaga arctica circa ostia fluuii Ob, passim in superficie terrae reperta sunt, et omnino recentia, nec fossilia, ab atmosphaerae tamen variationibus corrupta et carioſa, videbantur. Mihi itaque omnino verosimile visum est, Bisontum americanorum cadauera in oceanum arcticum casu delata, cum glacie vel et fluctibus ad nostras oras adpulisse, vbi facile ferae longe a littore cranium et ossa distraxisse credas. *Pallas.*

xillarium, ſeu oſſa intermaxillaria ad naſi oſſa vsque in capenſi, ſed longe minus alte, et nullo modo eousque adſcendere in Biſonte.

Oſſa ea deperdita videntur in ſpecimine Acad. Imperialis; alterum integrum, poſtea detegendum, etiam hanc ſimilitudinem comprobabit. Concludo ex collatione horum cum foſſili, Cranium, a Te deſcriptum ad Biſontem Americanum referendum eſſe.

Ill. Comes de Buffon in Suppl. Tom. 3. pag. 57. quaedam ſatis laudabilia de Biſonte addit, ſed quae ſcopum noſtrum non ſpectant; videtur Boues omnes, etiam Vrum pro eiusdem ſpeciei animalibus habere et gibbos a climate et nutrimento deducere. Addidit figuram Tab. V. pag. 64. quae cornuum illam flexuram, adeo characteriſticam in hoc animali, non exprimit. *Ill. Buffoni s* dein Biſontis Americani longe meliorem iconem dedit in Supplem. Tom. VI. pag. 46. Tab. III. in vniuerſum non admodum correctam, quemadmodum etiam non eſt eius obſeruatio, ac ſi cornua originem communem haberent, pag. 47. In cranio muſei mei cornua viſibiliter ſeparata ſunt, minus tamen quam in Bubalo capenſi. Cranium longum 2 ped. 4½ poll. pag. 47. ex vno centro oculi ad aliud 1 ped. 4 poll. ib. Pupillam non transuerſalem, quemadmodum in omnibus ruminantibus, ſed rotundam depinxit.

De Bubalo giganteo.

§. 2. In Volumine XIII. Nou. Comment. eiusdem Acad. pro Anno 1769. Buſalum giganteum foſſile admirabili cum perſpicuitate deſcripſiſti. Diſſertationis illius pretium magnifacere didici ex ſumma generoſitate Sereniſſ. Principiſſae *Daſchkow* Acad. noſtrae Directricis, qua placuit meis ita ſatisfacere deſi-

deſideriis, vt inter cetera, de quibus alia occaſione, ad me mitti curauerit ſummam partem Cranii Bubali eiusmodi, quod, cum ingenti Aſiatici recentis cranio in meo muſeo collatum, duplo maius repertum fuit.

Ex cornuum poſitione mihi probabile videtur non eſſe Bubali, ſed alterius ſpeciei Boum fragmentum: reſupinata enim cornua ſunt Bubalis omnibus, quotquot crania vera, vel figurata viderim: (**) notum praeterea eſt omnibus, a Chinenſibus perplures ſimilibus cornibus ex porcellana fictos vtique venumdari! Ludit tamen aliquando Natura in his, vti in aliis bobus nam ex Aſia accepi a *Cl. van der Steege* egregium Bubali cranium ſine cornuum vlla nota, et ab altero quondam meo diſcipulo, quem mors praematura nobis eripuit, *Hoffmanno* cranium Bubali Aſiatici cornibus adeo longis inſtructum, vt apices octo pedes rhenol. a ſe inuicem diſtent! cornua ipſa 5 pedes ſint longa! chorda, ex baſi ad apicem incuruum ducta 4 ped. cum 3 poll.; videtur *Sloanius* Phil. Tranſ. abridgd by *Badham*, Tom. VIII. pag. 191. ſimilem luſum cornuum indicaſſe: haec pedes 6. longa fuere, chorda 4 ped. 5 poll. cet.

Ex poſitione cornuum *primo* ad Bufalos non pertinuiſſe cenſeo; *ſecundo* quod ſoueam lacrymalem habuiſſe videantur, quibus Bubali carent omnes.

Quaeri

(**) Crania gigantea ſibirica equidem cornua minus reclinata habent vulgari Bubalo domeſtico, magis tamen quam Vrus, et carinata vt itidem Bubalis ſunt. Forſan aliquando innoteſcat magis maxima illa ſtirps Bubalorum in alpino iugo Tibetana regna circumambiente ſpontanea, cuius in deſcriptione Bubali grunnientis mentionem inieci; et quam nunc ſuſpicor crania noſtra foſſilia maxima quondam ſuppediſſe. *Pallas.*

Quaeri igitur nunc poteſt, an non ad Vrum pertinere potuerit? Datur ſine dubio aliqua ſimilitudo, verum foueae lacrymales adeo inſignes in Vri fig. 4. Tab. XII. et adeo characteriſticae in Ruminantium claſſe, vt quae in eadem ſpecie, licet modis diuerſis figuratae perpetuo adſunt, in giganteo cranio Tab. XI. fig. 1 et 2. tantummodo delineamentum quoddam fouearum praebent, et exoriuntur altius.

In Bobus noſtratibus ne nota quidem talis foueae reperitur, quam ob cauſſam mihi non arridet *Linnaei* adnotatio edit. XII. pag. 98. tamquam ſi Vrus varietas eſſet Taurorum Europeorum? Doleo interea quam maxime quod eiusmodi crania mihi comparare nequeam, pondus enim inſigne adderent ratiocinationibus noſtris de Orbe antiquo.

Admiratione autem dignum mihi videtur, quod in Promontorio freti Gaditani, ſeu in Rupe Gibraltarenſi ac in inſula Liſſa prope Dalmatiam, tantus numerus oſſium dentiumque ruminantium reperiatur! Fateor me in egregio ſpecimine Muſei Brittan. Londini ſcalpris variis denudaſſe dentes animalis cuiusdam rapacis, forte Leonis; etiam cuniculorum maxillas inferiores quatuor, in paruo rupis Gibraltarenſis fragmento, quod mihi dono dederat *Ill. Eques Bancks*, dum ad finem An. 1785. Londini morabar. Innumera equidem habeo fragmenta ex ea rupe, ſed omnia oſſibus maiorum ruminantium et eorum molaribus referta, inter quae Limacum terreſtrium variae cochleae.

Nob. Watſonius ſimiliter dono mihi dedit fragmentum ex inſula Liſſa, in quo maxillae pars cum quatuor molaribus ruminantis iunioris, noſtra ouium ſpecie non maioris.

Cuncta

Cuncta illa fragmenta conglutinata sunt inter se materia stalactitica fusca, subrubra, cui interjacet saepe spathum informe, fragmenta marmoris coerulei, aliquando argilla digitos maculans, et cochleae variae terrestres. Mirum sane, quod in locis tam dissitis, vti est Dalmatia a promontorio Freti Gaditani, inter quae tot regiones et maria reperiuntur, ossa sibi plane similia, eodem modo inter se conglutinata rupes illas constituant, materies lapidea in plerisque praeprimis ossium spongiosorum, vertebrarum v. c. ac digitorum cancellos impleuerit, ossaque albicantissima firmitatem suam satis bene retinuerint. Cochleae vero semper vacuae. Ossa in fragmenta minuta diffracta, et inter se confuse mixta!

De molaribus Elephantorum giganteorum, et eorum ossibus.

§. 3. De ossibus giganteis agens praeterire nequeo, me in Museo Brittannico vidisse dentes molares Elephantinos adeo ingentes, quo ad laminarum crassitiem, vt etiamsi ex primordialibus fuerint, triplo maiora animalia fuisse videantur, quam maxima Elephanti, qui hodie extant.

Eadem proportio locum habet in Elephanti osse femoris fossili, quod in Hollandia repertum et a me descriptum est in *Actis Harlem. Tom. XII. p.* 379. Id, licet epiphyses vtrinque absint, longitudinem habet 52 poll. seu 4 ped. cum 4 poll.; ac tredecim pollicibus maius integro osse femoris Elephanti asiatici senio mortui, cuius aliquot ossa Londini emi. Circumferentia huius est 11 pollicum, fossilis vero 15 poll. in media parte; patet tamen ex epiphysibus deperditis os femoris fossile iunioris fuisse animalis.

De dentibus molaribus Hippopotamorum giganteorum.

§. 4. In eodem muſeo ad amuſſim delineaui molarem dentem medium Hippopotami gigantei, qui ſuperat quater maximum illum molarem Hippopotami cuius figuram a me delineatam deſcripſiſti Tab. VIII. Act. Acad. Imp. Scient. Petrop. Tom. I. P. II. p. 214.

De Alcibus giganteis Hiberniae.

§. 5. Inter gigantea crania numeranda quoque ſunt illa Ceruorum, ſeu Alcium vti appellantur in Hibernia obvia, cuius notabile exemplum proſtat in Archaeolog. Brit. Tom. VI. Anni 1785. Nob. D. *Percy egregium* id cranium emit: diſtantia inter extremos apices cornuum erat 14 ped. et 4 poll. Latitudo frontis 11 poll. cum $\frac{1}{2}$. etc. Cel. *Pennant* meretur qui ſuper his conſulatur, Hiſt. of quadr. p. 98.

Ipſe poſſideo duo ſpecimina, ſatis integrum vnum, ſed adeo diuerſum a recentibus Alcibus, vt nullus dubitem, quin extinctum ſit genus, quemadmodum etiam Cel. *Percy*, ac *Pennantio* viſum fuit.

Magis audacter diuerſitatem inter recentes, et foſſiles Alces adfirmare audeo, non modo ob cornuum diſſimilitudinem, ſed et ob varietatem totius compagis. Eius interea humanitatis fuit Nobiliſſimus D. *Stehlin*, vt ex Lithuania adhuc miſerit perelegans cranium cum cornibus Alcis, quod, licet iunioris animalis, longius tamen eſt foſſili, et magis tenerum. Foſſile enim eſt latius, robuſtius, et annoſi praeterea animalis. Cornua terribiliter ampla, et denſa.

Na-

Narium apertura 4½ poll. longa, duplo minor illa recentis capitis. Ossa intermaxillaria ossibus nasi inserta, quae tantum ad dimidiam altitudinem ossium maxillarium adscendunt in recenti. Verbo, diuersa et ad ceruos magis accedens species mihi videtur et exstincta!

Robur haec addunt obseruatis tuis Tom. XIII. p. 468. animaduertendum tantum, crania illa, licet bipedalia, minus longa esse recentibus.

Monere hac occasione oportet, capita pleraque adultorum Boum, Bufalorum, Equorum, Camelorum, Camelopardalum, Rhinocerotum, Hippopotamorum, duos pedes ad minimum, et in vniuersum longa esse.

De ossibus Mamonteis.

§. 6. Memini me in Parte II. Tom. I. Actor. Academ. Imp. Sc. Petrop. p. 219. ad finem p. 222. coniecturas meas proposuisse circa ossa Mamontea, eorumque molares, atque plausibilibus argumentationibus, Ill. *Hunteri* obseruatis fidentem, monstrasse: Mamonteum animal Elephanto simile, atque proboscide ornatum fuisse; quia in Phil. Transf. Lond. Vol. 58. p. 45. pro certo statuit habuisse *dentes exsertos*, sed *intortos*!

Ab ipso *W. Huntero*, cuius amicitia fruitus sum ab Anno 1746. acceperam Anno 1778. dentis talis exserti plus minus incurui, 2 ped. cum 4 poll. longi, partem solidam, 12 poll. crassam, non procul a fluuio Ohione Americes repertam: hac epistola concomitatam: London Dec. 24. 1778. *I sent to you the tooth of the american incognitum for your museum, — this is but a third part of it.* Id est, „mitto Tibi dentem incogniti „Americes pro tuo museo — est tantummodo tertia pars „totius.“

Subſtantia eius interim, et fibrarum decurſus ebur Elephantinum mihi videntur declarare. Nullos vero molares huius incogniti niſi pictos, nulla oſſa eius vllibi videram; etiamſi Muſea Europae maxime celebria ſatis curioſe examinaſſem; carniuorum tamen non fuiſſe animal p. 202. ex molarium figuratione ſimpliciter, determinaui.

Nouum deinceps curioſitati meae ſtimulum addidit Celeb. *Michaëlis* iam Marpurgi Celebris Med. Profeſſor. Is ex America redux ad me miſit figuram palati Mamontei magnitudine naturali, atramento Indico egregie depictam. Obſtupui!

Quatuor ei inhaerebant dentes molares, poſteriores duo magni, minores anteriores, figurae eiusdem et formae, quales iam plures inprimis a *Collinſono*, a *Guil. Huntero*, atque a Comite *de Buffon a*) repraeſentatos videram.

In hoc palato nullus erat pro exſertis locus, dehiſcebant oſſa intermaxillaria ipſa, quae erant exigua! Omnes igitur meae coniecturae eo ipſo, momento vanae non modo, ſed ridiculae euadebant. Scilicet, ſi huic Cl. *Michaëlis* figurae, vnicae, fides habenda eſſet. Tanto autem cum artificio exarato erat pictura, ſtylo adeo naturali et vero, vt impoſſibile mihi videretur, fictam, ſeu ex imaginatione Pictoris factam fuiſſe tabulam!

Arri-

---

a) In Supplem. Hiſt. Nat. Tom. V. *notes iuſtificatiues* p. 511. Tab. I. et II. Radices mamonteorum molarium non bene ſunt repraeſentatae, deficiunt transuerſales annuli, quos omnes habent; ſuppoſuit Ill. Comes ib. p. 512. virimque quatuor vel ſex adeſſe. Tab. V. quidem eiusdem animalis, ſed magis detritos depingi curauit. Fig. Collinſonii Phil. Tranſ. Vol. 57 Tab. XXII. p. 469. egregia quidem, ſed annulos non exprimit.

Arriſerant mihi valdequam, quae ib. p. 217. de Muſeo veſtro Academico pronunciaſti: Mamontea oſſa tam varia, et tanto in eo reperiri numero, vt ſperare auſus ſim, me duplicata quaedam, ſi Sereniſſimam Principiſſam *Daſchkaw* ſupplicarer, ex immenſa illa collectione haud difficulter acquiſiturum; reſpondit autem, duplicata Mamontea, in ditiſſimo ſecus, Imperiali Muſeo non fuiſſe reperta ***). Gratioſe tamen ad me miſit *Elephanti inferiorem maxillam foſſilem*, gigantei *Bubali cranium*, cum *dente exſerto valde incurvo*, maximam partem decompoſito, non Mamontei monſtri, ſed veri Elephanti. Longitudo externe menſurata eſt 5 ped. cum 2 pollicibus, chorda e baſi ad apicem ducta = 3 ped. cum 4 poll. Circumferentia pedem magna eſt; interna cauitas pedem cum octo poll. profunda reperta fuit.

Londinum interea profectus in Muſeo Britannico permultos offendi, ingentesque molares ex America olim aduectos, atque maxillae ſuperioris ſeu palati fragmentum, quod exactiſſime reſpondebat Iconi a Celeb. *Michaëlis* mihi communicatae.

En vtriusque Monogramma! Patet ex ſimilitudine roſtrum huius animalis fuiſſe anguſtum nimis, quam vt exſertos tantae

(***) Mamontea oſſa a Ruſſis, praeſertim per Sibiriam, vulgo appellantur Elephantina, quae ſumma abundantia foſſilia in ſtratis ſuperficialibus reperiuntur; eaque in Muſeo noſtro Academico copioſe proſtant, immo dentes eburnei foſſiles ſed recentiores, a Portu S. Archangeli vulgo pro tornatili opere exportantur. Ill. *Campero* autem placuit incognitae, per Americanas foſſiles reliquias celebratae et neſcio annon forte inter Cetacea marina adhuc latenti Belluae Mamonteum nomen, contra noſtratium mentem, adpropriare, cuius oſſa nunquam, dentes rariſſime apud nos repertos fuiſſe alibi iam monui. Mihi omnino tantum duo imperfecti illi molares eius, ad Demam fl. inter ferri mineram effoſſi innotuerunt, quorum alterum quondam deſcripſi et delineavi. *Pallas.*

molis, quantae ipſi praeprimis, a *W. Huntero* tribuuntur, continere potuerit. Reſpondebat huic palato maxilla inferior eiusdem Muſei a *W. Huntero* Phil. Tranſ. Vol. 58. p. 42. omni cura repraeſentata; continet maiorem dentem cum tuberibus quatuor, deficit anterior minor. Adnotauit Cl. *Michaëlis* huic maxillae ſimilem repertam fuiſſe cum fragmento palati.

Veriſimile igitur eſt, animal illud magnum quidem, ſed nullo modo carnivorum, neque Elephanto ſimile fuiſſe, quid de eo ſentiendum ſit, iam incertus haereo! Vobis ſolis, ſodales Inluſtriſſimi! contingit adire Corinthum. Agite quaeſo, et examinate omnia illa oſſa foſſilia quae in Muſeo Acad. Imperialis tanta copia reperiuntur; et facito vt cognitum euadat animal cuius reliquiae tot Celebres Hiſt. Nat. Cultores fruſtra occupauerunt, atque ſuperarunt.

Si oſſa femoris, forte fortuna, interſperſa reperirentur, attendendum ſedulo ad eorum capita: carent Elephanti ligamento tereti, quod in Rhinocerotis oſſis femoris capite adeſt: Os femoris Rhinocerotis aſiatici magnam, compreſſam, ſed rotundam habet apophyſin infra trochanterem. Illud Elephanti eſt aequabile, absque vllo proceſſu, excepto trochantere, qui in vtroque ſimplex eſt.

Spina ſcapulae in Elephanto furcam repraeſentat, in Rhinocerote vncum, deorſum incuruatum et retrorſum.

Hac ratione poſteri lente quidem, ſed his inſtructi obſeruationibus totum tandem myſterium extricabunt. Gaudeo interea quammaxime, quod, venia Inluſtriſſimorum Britan. Muſei Curatorum, ex duplicatis duos dentes molares Ohionenſes, egregios, mihi comparare licuerit; aliosque delineare, inter quos pro-

procul dubio ille, cuius coronam *N. Grewius* deſcripſit, atque repraeſentauit a parte ſuperiore Tab. 19. nomen ipſi dans dentis Animalis marini. *R. Waller*, qui Opera Immortalis *R. Hookii* poſthuma edidit, hunc eundem dentem Tab. V. p. 285. explicuit, tanquam ad Balaenam, aut Elephantum pertinentem.

Vidi non modo ſaepius, ſed, vti monui, accuratiſſime delineaui, obſeruauique eſſe ſimilem mamonteis, ſed iunioris animalis, cuius molares radices nondum egerant. In fragmento maxillae ſuperioris cuius monogramma addidi, dens molaris dexter anterior eandem habet faciem. Nuper in Burgundia ſimilis repertus eſt.

Id autem in omnibus, etiamſi longiſſimis radicibus inſtructis, verum deprehendi, quod intus caui ſint: generantur igitur humanorum, non Elephantorum molarium inſtar. In his enim, ex multis lamellis, ſibi applicatis dens formatur ſolidus, in quarum meditulliis cruſta vitrea recondita eſt. In illis primum coronae cruſta vitrea oritur, dein radicum principia annulatim, quorum caua implentur ſubſtantia minus dura pedetentim depoſita.

Praeterire interea nequeo ex Dentium molarum magnitudine ac mole concludendum non eſſe ad ipſam animalis magnitudinem, aut molem. Dentes enim in omnibus, quotquot noui, animalibus rationem nullo modo habent ad corporis vaſtitatem, ſed ad naturam alimentorum, quae vſurpant. Elephas molares decuplo maiores habet Rhinocerote. forte decies quinquies maiores, licet decuplo maius non ſit animal. Equus quamquam minor Camelopardali, dentes maiores habet. Apri aethiopici ſimiliter ingentes habent molares, etiamſi noſtratibus aequale, immo minus habeant corpus. De exſertis idem pronuntiandum.

In

In omnibus attendendum eſt ad capitis magnitudinem relatiue ad colli longitudinem: in iis enim in quibus molares valde magni ſunt, collum eſt breuius.

Pronuntiare nunc certo licet, Mamonteum animal non fuiſſe carniuorum, quoniam neque inciſores, neque laniarios habuit; probabiliter vero ſolidioribus radicibus fuiſſe nutritum, vel durioribus arborum ramis. Omnia enim, quae organicam habent ſtructuram, animalia plantaeve ſint vel inſecta, alimentum praebent omnis generis viuentibus animalibus.

Haec ſi grata fuiſſe Academiae Imperiali percepero, Supplementa reliqua, de Apris Aethiopicis, de Rhinocerote Aſiae et Africae, de Didelphide Aſiatica, et Myrmecophaga Capenſi, quae parata ſunt, debita cum reuerentia data occaſione mittam.

Explicatio tabularum. Tab. VIII.

A. B. Dens molaris anterior maxill. ſuperioris videtur iunioris animalis fuiſſe.
B. C. Poſterior lat. dextri.
D. E. Anterior ſiniſter.
E. T. Poſterior.
G. et H. Sulci pro neruis palatinis.

Tab. IX.

A. B. Sinus $\frac{1}{4}$ vel plus minus $\frac{1}{2}$ poll. profundi, intus glabri.
C. D. E. C. D. E. Oſſa intermaxillaria.
D. E. D. Fiſſura, quae recepit procul dubio canales inciſiuos.
F. G. H. Molares anteriores.
I. K. Poſterior.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI IN SPECVLA ACADEMICA ANNO 1786 HABITAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Conuent. exhib. d. 4 Octobr. 1787.

Quas poſt reditum ab expeditione obſeruationes aſtronomicas facere mihi licuit, eas breuiter exponere conſtitui. Primo loco occurrit in diario meo tranſitus Mercurii per diſcum Solis die $\frac{23\ Aprilis}{4\ Maii}$ tempore ciuili obſeruatus, deinde ſequuntur nonnullae immerſiones ſatellitum Iouis: his adieci obſeruationem Eclipſis Solis die $\frac{3}{13}$ Iunii anni currentis.

Mercurius omnium ſyſtematis noſtri planetarum minimus et proximus Soli, in cuius radiis continue fere deliteſcens nonniſi raro ſub diluculum aut crepuſculum et plerumque in vaporibus horizontis conſpiciendum ſe praebet, vnde tritum ſermone prouerbium felix Aſtronomus qui Mercurium vidit. Magnum ſane temporis interuallum praeterlapſum, donec primum pro planeta agnoſceretur, et plura ſecula requirebantur

ad exactam motus eius cognitionem, vt occursus ipsius cum Sole praedici possent. Ante telescopiorum inuentionem theoriam huius planetae mancam et imperfectam fuisse facile patet; imo nouissimae ac meliores motuum eius tabulae nonnullis adhuc defectibus laborant, quod ipsa haec obseruatio satis superque testatur: nam ingressus planetae in solem et egressus plus quam tribus quadrantibus horae a calculis Astronomicis dissentiunt; nec mirum est, quia hucusque paucas cas que incompletas obseruationes transitus Mercurii circa nodum eius descendentem et prope Aphelium versantis, Vraniae cultoribus instituere licuit. Hinc elementa motuum eius indigent correctione, quae ex obseruationibus vltimi huius transitus obtineri potest. Vtinam nostra huic negotio, aliquid vtilitatis conferat.

Tempestas obseruationi admodum fauebat, nisi excipias vndulationem limbi solaris, quae praesertim circa introitum notabilis erat. Motum penduli, ad quod momenta signata sunt, per altitudines solis correspondentes diebus 3, 4, 5 et 6 Maii captas bene exploratum habui; atque tam ingressum quam egressum planetae telescopio Schorti catoptrico $2\frac{1}{2}$ pedum obseruaui. Illucescente die obseruationis limbus Solis superior

ad horizontem appulit - - - - - $3^{h}.\ 53'.$

Totus discus apparuit - - - - - - - 3. 58.

Principalia momenta memorabilis huius phaenomeni sequentem in modum a me notata sunt.

In Ingressu.	Temp. vero.
Contactus primus siue externus - -	$5^{h}.\ 0'.\ 6''$
Contactus secundus seu internus - -	5. 3. 13
Vnde centrum Mercurii in limbo Solis -	5. 1. $39\frac{1}{2}$

In

	In Egreſſu.	Temp. vero.
Contactus tertius ſiue interior - -		$10^{h}.\ 27'.\ 12''$
Contactus quartus ſiue exterior - -		10. 30. 15
Adeoque centrum planetae in limbo Solis -		10. 28. $43\frac{1}{2}$
Hinc duratio totius phaenomeni - -		5. 30. 9
Et centri planetae in ſole viſi - -		5. 27. 4
Medium tranſitus ex primo et quarto cont. -		7. 45. $10\frac{1}{2}$
Idem ex ſecundo et tertio cont. - -		7. 45. $12\frac{1}{2}$.

Durante tranſitu obſeruaui appulſus limborum Solis et Mercurii ad fila quadrantis micrometrica horizontale et verticale; verum ob craſſitiem horum filorum et vndulationem aëris, praeciſionem vnius ſcrupuli ſecundi temporis, adeoque 15 ſecundorum circuli, vix ipſis ineſſe ingenue fateor, illisque referendis ſuperſedeo; quum multo tutius diſtantiae a celeberrimo Domino *Rumovski* micrometro obiectiuo menſuratae et rigoroſe iam ſupputatae ſunt. Progredior nunc ad Eclipſes ſatellitum Iouis:

$\frac{21}{3}$ Iulii Immerſio ſecundi ſatellitis

Lumen ſatellitis imminutum - -	$11^{h}.\ 25'.\ 50''$
Difficulter iam conſpicitur - -	11. 26. 21
Immerſio certa - - - -	11. 26. 30.

Coelo ſereno, faſciis ſatis conſpicuis. Emerſionem eiusdem ſatellitis videre non potui, quamuis Iupiter bene terminatus et reliqui tres ſatellites diſtincte apparebant.

$\frac{21}{3}$ Iulii Immerſionem primi ſatellitis ob nubes diſperſas exacte obſeruare non licuit, ſatellitem vidi ad - $12^{h}.\ 3'.\ 14''$
quo momento nube tectus, propulſa illa 12. 8. 0
Satelles iam Immerſus erat.

$\frac{1}{12}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis. Lumen ſatellitis debelitatum - - - - - - - - $14^{h}.\ 0'.\ 0''$
Immergi videtur - - - - $14.\ 0.\ 55$
Immerſio certa - - - - - $14.\ 0.\ 59$
Aere poſt pluuiam vaporoſo, faſciae dubie videbantur.

$\frac{10}{21}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis - - $10^{h}.\ 24'.\ 25''$
Ioue in vaporibus horizontis verſante ſatellites minus diſtincte conſpiciebantur. Obſeruatio dubia.

$\frac{17}{28}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis: decrementum luminis ſenſibile - - - - - $12^{h}.\ 19'.\ 30''$
Satelles vix iam videtur - - $20.\ 17$
Immerſio certa - - - - - $20.\ 22$
Coelo ſereno et pacato Ioue bene terminato et faſciis conſpicuis.

$\frac{22}{2}$ Aug. sept. Immerſio tertii ſatellitis - - - $11^{h}.\ 28'.\ 40''$
Coelo vaporoſo. Emerſionem eiusdem ob nebulam obſeruare non potui.

$\frac{24}{4}$ Aug. sept. Immerſio ſecundi ſatellitis coelo ſereno - $11^{h}.\ 19'.\ 48''$
Eodem Immerſio primi ſatellitis intra hiatus nubium - - - - - - - - $14.\ 16.\ 15$

$\frac{28}{8}$ Aug. sept. Occultatio λ ♓ a Luna - - - $11.\ 39.\ 29$
In reductione temporis veri vltimae obſeruationis adeſt dubium 5 v. 6 ſecundorum, quia in motum horologii ob dies nubilos inquirere non licuit.

Eclipſin Lunae die $\frac{23}{3}$ Dec. ian. nubila coeli facies obſeruare impediuit.

His

His paucis adiungo obſeruationem Eclipſeos Solis die $\frac{4}{13}$ Iunii 1787 factam.

Diebus eclipſin hanc praecedentibus $\frac{1}{12}$, 2, 3 et $\frac{4}{13}$ examinaui motum penduli per altitudines correſpondentes, eumque vniformem reperi.

Initium eclipſis iam coepit - - -	$5^h. 56'. 25''$
Idem aeſtimatum - - - -	5. 56. 20.

Diſcus Solis abundabat maculis, quas in appoſita tabula IV. fig. 5. videre licet.

Omnes hae maculae Luna tectae, earum Immerſiones et Emerſiones ita a me obſeruatae ſunt.

	Immerſiones. Temp. vero.
Limbus Lunae tangit maculam *c* - -	$6^h. 24'. 21''$
totam texit - - -	24. 34
Macula *b* tegitur - - - - -	26. 34
—— *f* - - - - - - -	26. 43
—— *e* - - - - - - -	32. 24
—— *d* - - - - - - -	33. 26
Margo maculae *a* - - - - -	34. 44
Nucleus eiusdem - - - - -	35. 24
Totus Nucleus - - - - - -	36. 37
Macula *k* - - - - - - -	37. 2
—— *i* - - - - - - -	38. 46
Margo maculae *b* - - - - -	41. 26
Tota macula *b* - - - - - -	42. 8.

Emer-

Emerſiones.	Temp. vero.
Macula *a* tota (per tubum quadrantis) - -	$6^h.\ 54'.\ 25''$
—— *i* per teleſcopium - - -	7. 2. 55
—— *b* tota - - - - - -	8. 11
—— *c* —— - - - - - -	17. 20
—— *e* —— - - - - - -	23. 37
—— *d* —— - - - - - -	25. 42
Finis eclipſeos - - - - -	7. 36. 3
Duratio eclipſis - - - - -	1. 39. 43
Medium —— - - - - -	6. 46. $11\frac{1}{2}$.

Gradus Thermometri paulo ante eclipſin + 17.
in maxima obſcurat. + 15.
poſt eclipſin - + 16.

DE

DE MOMENTO CONIVNCTIONIS MERCVRII CVM SOLE NEC NON LATITVDINE ILLIVS TEMPORE TRANSITVS PER DISCVM SOLIS ANNO 1786

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 18 *Octobr.* 1787.

§. 1.

Quae hucusque ad notitiam meam peruenere momenta, a diuersis Astronomis pro coniunctione Mercurii cum Sole prolata, tantopere interse dissentiunt, vt vix dici possit cuinam determinationi maior fides sit habenda. In Notitia temporum pro anno 1789 Parisiis edita momentum coniunctionis ad meridianum Parisinum iuxta computum Cel. *de Lambre* statuitur $17^{h.}\ 10'.\ 7''$, Tabularum Cel. *de la Lande* error in Longitudinem $2'\frac{1}{3}$. de errore autem in Latitudinem nulla fit mentio. In actis Academiae Regiae Stockholmiensis Cel. *Prosperin* pro tempore coniunctionis elicit eiusmodi momentum, quod cum momento ex obseruatione Petropolitana deducto optime consentit sc. $17^{h.}\ 22'.\ 4''$. t. v. Suspicior equidem in momento a Dno. *de Lambre* assignato rationem habitam esse aberrationis, verum applicata etiamnum aberratione momento coniunctionis Vpsaliensi vel Petropolitano differet illud a Parisino 5

circiter minutis primis. Quamobrem non ingratum Aſtronomiae cultoribus facturum me exiſtimo, ſi originem huius discrepantiae et tandem vocatis in ſubſidium non nullis in aliis locis inſtitutis obſeruationibus verum momentum coniunctionis apparentis Mercurii cum Sole demonſtrauero.

§. 2. Quanquam diameter Mercurii in calculis meis de tranſitu Mercurii per diſcum Solis anno praeterito Academiae Scientiarum traditis tanta fuerit adhibita, quanta ſequitur ex immediatis obſeruationibus nempe $8''$, 2 et in quantitate illius parum a vero aberraſſe me exiſtimem, attamen quia modus, quo nunc momentum coniunctionis indagaturus ſum, non parum pendet a quantitate diametri Mercurii, conſultum eſſe iudicaui ante omnia ex mora Mercurii in limbo Solis diuerſis in locis obſeruata ſtabilire illius diametrum. Hunc in finem conſpectui hic exhibeo non nullas obſeruationes, quae ad notitiam meam peruenire. Anno 1786 die $\frac{22\ Apr.}{3\ Maii}$ temp. Aſtr. ver.

	Cont. intern in exitu	Cont. extern. in exitu	Mora.
Londini	$20^h.26'.51'',3$	$20^h.29'.51'',3$	$3'.0''$
Pariſiis	20. 36. 28,3	20. 39. 57,7	3. 29,4
Manheimiae	21. 0. 21	21. 4. 13	3. 52
Lundae	21. 18. 47,8	21. 22. 47,8	4. 0
Vpſaliae	21. 36. 39,5	21. 41. 40,5	5. 1
Excluſis *Godolini* interno et *Nicandri* externo			
Stockholmiae	21. 38. 18	21. 41. 48	3. 21
Sumto medio Petropoli	22. 27. 5	22. 30. 25	3. 20

Mora

Mora Vpſaliae obſeruata differt ab omnibus reliquis, id circo conſentiente Cel. *Proſperino*, qui in momento contactus externi loco 41′ legenda eſſe 40′ exiſtimat, moram Vpſaliae obſeruatam 4′. 1″. ſupponemus.

§. 3. Vt ex mora Mercurii in limbo Solis obſeruata diameter illius determinetur, cognita debet eſſe inclinatio orbitae relatiuae ad Eclipticam, nec non minima tempore tranſitus centrorum diſtantia. Primum horum elementorum ſtatuo 10°. 18′. 30″. tale nempe, quale requirunt motus horarii e Tabulis Cel. *de la Lande* deducti ſc. motus horarius Mercurii a Sole 3′. 57″,53 in Longitudinem, et 43″,21 in Latitudinem. Quod ſpectat minimam centrorum Solis et Mercurii diſtantiam eam iure 9′. 32″. vt veram vel ſaltem vero proximam aſſumere me poſſe exiſtimo; tantam etenim praebuit immediata obſeruatio circa tempus medii tranſitus a me inſtituta. Aſſumtis his elementis pro ſemidiametro Mercurii ſequentes obtinui valores

Semidiameter ☿ ex mora	Londini obſeruata	4″, 14
	Pariſiis - -	4, 82
	Manheimiae -	5, 34
	Lundae - -	5, 52
	Vpſaliae - -	5, 54
	Stockholmiae -	4, 62
	Petropoli - -	4, 60
	Medium - -	4, 77.

Niſi igitur aiterutram obſeruationem reliquis praeferre velimus, maxime probabile videtur ſemidiametrum Mercurii in Sole viſi non maiorem 4″, 77 ſtatui debere.

§. 4. Vt iam ex contactu interno in exitu obſeruato eruerem momentum coniunctionis, poſita parallaxi Solis 8″,5 et paral-

laxi Mercurii a Sole 6″, 8 computaui pro locis ſupra memoratis parallaxes Mercurii in Longitudinem et in Latitudinem, ac obtinui

Cont. internus in exitu.	Parall. Long.	Latit. ☿ Bor.	Parall. Latit.	Diff. Long. apparens.
Londini 20ᵇ.26′.51″	+ 1″,90	8′.59″,6	5″,21	783″,02
Pariſiis 20. 36. 28	+ 2, 06	8. 59, 6	4, 97	782, 86
Manheim 21. 0. 21	+ 2, 08	9. 0, 1	4, 54	782, 23
Lundae 21. 18. 47	+ 0, 97	9. 0, 5	5, 10	782, 33
Pragae 21. 23. 53	+ 1, 39	9. 0, 5	4, 72	782, 08
Vpſaliae 21. 36. 39	+ 0, 43	9. 0, 4	5, 24	782, 50
Stockh. 21. 38. 18	+ 0, 45	9. 0, 4	5, 20	782, 47
Petropol. 22. 27. 5	— 0, 16	9. 0, 6	4, 96	782, 04

§. 5. Quoniam parallaxis Solis in computo adhibita nulla eget correctione, vt in eruendo momento coniunctionis reliquarum correctionum ratio habeatur, ponamus correctionem differentiae ſemidiametrorum Solis et Mercurii δ, Latitudinis vero Mercurii y, atque pro momentis coniunctionum ex contactu interno in exitu ſequentes prodibunt expreſſiones

ex Londinenſi	17ᵇ. 8′. 35″	— 18, 40 δ + 10, 43 y.
Pariſino	17. 18. 12	— 18, 40 δ + 10, 43 y.
Manheim	17. 42. 14	— 18, 41 δ + 10, 44 y.
Lundenſi	18. 0. 55	— 18, 41 δ + 10, 45 y.
Pragenſi	18. 5. 58	— 18, 41 δ + 10, 44 y.
Vpſalienſi	18. 18. 53	— 18, 40 δ + 10, 43 y.
Stockholm.	18. 20. 32	— 18, 40 δ + 10, 44 y.
Petropolit.	19. 9. 34	— 18, 41 δ + 10, 45 y.

Per-

§. 6. Perpendenti has expreſſiones facile patet differentias meridianorum hinc oriundas nullam ſubituras mutationes, quantaecunque ſint correctiones δ et y, dummodo contactus recte ſint obſeruati; momenta vero coniunctionum neglectis his correctionibus proditura eſſe non parum erronea. Cum igitur ſemidiameter Solis in computo adhibita $15'.\ 52'',1$ certiſſimis fundata ſit obſeruationibus, valor ipſius δ pendebit tantum a ſemidiametro Mercurii, quam ſupra probauimus non vltra $4'',77$ adſcendere poſſe, et cum ſemidiameter Mercurii a nobis adhibita fuerit $4'',1$ maxima correctio, quam differentia ſemidiametrorum recipere poteſt, erit $= -0'',67$, vnde momenta coniunctionum non niſi $12''$ prorogabuntur. Aliter vero res ſe habet cum correctione Latitudinis Mercurii y, cum illa ad plura minuta ſecunda adſcendere queat. Deficientibus igitur aliis obſeruationibus pro definiendo valore ipſius y ad obſeruationem Petropolitanam erit confugiendum, vbi cum pro contactu interno in introitu $17^h.\ 2'.\ 19''$ parallaxis in Longitudinem ſit $+ 1'',38$ Latitudo Mercurii $12'.\ 54'',5$ et parallaxis in Latitudinem $6'',60$ habebitur momentum coniunctionis

ex introitu $19^h.\ 22'.\ 23'' + 25,88\,\delta - 20,98\,y$. Eſt autem
ex exitu $19.\ 9.\ 34 - 18,41\,\delta + 10,45\,y$

vnde pro definiendo valore ipſius y obtinemus ſequentem aequationem

$$12'.\ 49'' + 44,29\,\delta - 31,43\,y = 0,$$

quae poſito $\delta = 0$ dat $y = 24'',5$ poſito vero $\delta = -0'',67$ praebet $y = 23'',5$ prorſus fere idem, quod in Diſſertatione de tranſitu Mercurii per Solem Academiae Scientiarum exhibita, ex diſtantiis limborum micrometro captis elicueram: atque hinc perſpicuum fit, momentum coniunctionis vltra 4 minuta prima proditurum eſſe erroneum, ſi non habeatur reſpectus ad correctionem Latitudinis, quam omnes neglexiſſe viden-

tur, qui ex contactu ſolum interno tempus coniunctionis apperentis eruendum ſibi propoſuerant. Ponamus igitur $\delta = -0'',5$ et $\gamma = 23''$: ac momenta coniunctionum ſequentia obtinebuntur

Ex contactu interno	Pariſino	$17^h.\ 22'.\ 21''$
	Londinenſi	17. 12. 43
	Manheim.	17. 46. 23
	Lundenſi	18. 5. 4
	Pragenſi	18. 10. 7
	Vpſalienſi	18. 23. 2
	Stockholm.	18. 24. 41
	Petropolit. I.	19. 14. 8
	- - - II.	19. 13. 43

§. 7. Praeter has, quas retuli, ad calculum reuocani non nullas alias obſeruationes, verum eas ſilentio praetereo, quia illae manifeſto errori cuidam obnoxiae eſſe videntur. Quodſi momenta ſupra relata per cognitas differentias meridianorum reducantur ad meridianum Pariſinum, prodibit momentum coniunctionis

			Diff. mer.
ex obſeruatione	Pariſina	$17^h.\ 22'.\ 21''$	
	Londinenſi	17. 22. 21	$0^h.\ 9'.38''$ occ.
	Manheim	17. 21. 40	0. 24. 43 or.
	Lundenſi	17. 21. 38	0. 43. 26
	Pragenſi	17. 21. 47	0. 48. 20 *)
	Vpſalienſi	17. 21. 48	1. 1. 14
	Stockholm.	17. 21. 46	1. 2. 55
	Petropol. I.	17. 22. 10	1. 51. 58
	- - - II.	17. 21. 45	

Con-

*) Longitudo Pragae deſumta eſt ex Ephemeridibus Aſtronomicis ad meridianum Windobonenſem Viennae editis, in Notitia temporum ſtatuitur illa 48'. 58''. quae mihi peccare videtur in exceſſu.

§. 8. Conferenti determinationes has facile patet momenta coniunctionis ex obſeruationibus Manheimiae, Lundae, Pragae, Vpſaliae, Stockholmiae et Petropoli habitis deducta optime inter ſe conſentire, cum contra momentum coniunctionis ex obſeruatione Pariſina et Londinenſi elicitum differat ab omnibus ſupra dictis plus quam $30''$. Non meum eſt rationem reddere huius discrepantiae; interim tamen veroſimile videtur originem illius in ipſis obſeruationibus eſſe quaerendam. Nam computatis pro quouis ſupra memoratorum locorum effectibus parallaxeos, et contactibus internis in exitu obſeruatis ad centrum reductis Longitudines reſpectiuae Manheimiae, Lundae, Vpſaliae, Stockholmiae et Petropolis prodeunt cum Longitudinibus alinnde cognitis optime conſentientes; collatis vero iisdem cum obſervationibus Pariſiis et Londini habitis in Longitudinibus inde reſultantibus idem fere diſcrimen deprehenditur ac in momentis coniunctionum ad meridianum Pariſinum reductis, prout patet ex ſequenti laterculo.

Contact. intern. in exitu t. v.	Effectus Parall.	Contact. ad centr. reduct.	Longit. reſultans	Diff. a vera
Pariſiis $20^h.36'.28''$	$-1'.35'$	$20^h.34'.53''$		
Londini 20. 26. 51	— 1. 32	20. 25. 19	$0^h.\ 9'.34''$	
Manheim 21. 0. 21	— 1. 23	20. 58. 59	0. 24. 6	$37''$
Lunda 21. 18. 47	— 1. 17	21. 17. 30	0. 42. 37	+9
Pragae 21. 23. 53	— 1. 20	21. 22. 35	0. 47. 42	+8
Vpſaliae 21. 36. 39	— 1. 10	21. 35. 27	1. 0. 34	+0
Stockh. 21. 38. 18	— 1. 10	21. 37. 8	1. 2. 15	+0
Petropoli 22. 27. 5	— 55	22. 26. 17	1. 51. 17	+2

§. 9. His rationibus inducor, vt credam propius me ad veritatem acceſſurum, ſi excluſis determinationibus ab obſeruatione

tione Pariſina et Londinenſi petitis, medium ſumſero e reliquis, ac tempus verum coniunctionis apparentis $17^{h}. 21'. 45''$ ſuppoſuero, pro quo cum Longitudo Solis ex tabulis Cel. *de la Lande* ſit $1^{s}. 13°. 50'. 2'',3$ Longitudo Mercurii Heliocentrica $7^{s}. 13°. 53'. 48''$, Geocentrica vero $1^{s}. 13°. 46'. 47''$ ſequitur hinc Tabulas Cel. *de la Lande* aberrare in Longitudinem in defectu $3'. 15'',3$ et in Latitudinem $23''$ quam proxime, ſic vt Latitudo Mercurii tempore coniunctionis ſtatui debeat $11'. 42'',6$. Quodſi ratio habeatur obſeruationis Pariſienſis et Londinenſis prodibit momentum coniunctionis parum abludens a ſupra inuento ſc. $17^{h}. 21'. 55''$ poſitionibus Solis et Mercurii iisdem fere manentibus.

Conſtituto hoc modo momento coniunctionis apparentis facile erit eidem applicare, ſi cui libuerit, correctionem ab aberratione oriundam.

DE

DE TRANSITV MERCVRII PER SOLEM ANNO 1786 DIE $\frac{23}{4}$ April. Mai. BAGDATI OBSERVATO.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 22 Nouembr. 1787.

§. 1.

Post praelectam demum coram Academia Scientiarum dissertationem de momento coniunctionis Mercurii cum Sole ad manus meas peruenit obseruatio transitus Mercurii per Solem Bagdati habita. Obseruatio ista omnibus Europaeis praetiosior est, et quod introitum spectat palmam praeripere videtur obseruationi Petropolitanae; nam momento contactus interni in introitu Bagdati altitudo Solis fuit 8°. 45′ circiter, in qua refractio certitudinem obseruationum infringere cessat, cum contra Petropoli Sol non nisi ad 6°. 50′ fuerit eleuatus. Igitur simulac compos factus sum huius obseruationis, reuocaui eam ad calculum, quem eo lubentius Academiae Scientiarum exhibeo, quod obseruatio Bagdati instituta egregie confirmet consectaria ex obseruatione Petropolitana elicita.

§. 2. Obseruatio Bagdati instituta ita se habet:

Contactus internus in introitu	$18^h.$	$0'.$	$5''$
- - - internus in exitu	23.	22.	52
- - - externus in exitu	23.	26.	48.

§. 3. In Notitia temporum ad annum 1788 Latitudo Bagdati ſtatuitur 33°. $21'\frac{3}{4}$ Bor. Longitudo vero a meridiano Pariſino verſus ortum numerata 2^h. 48′. 18″. Aſſumtis igitur iisdem Elementis, quibus in diſſertatione praecedente vſus ſum, nempe pro 17^h. 18′. 40″. t. m. Pariſini Longitudine Solis 1^s. 13°. 50′. 3″,3, Longitudine Mercurii Geocentrica 1^s. 13°. 46′. 46″,5, Latitudine 11′. 19″,6, motu horario Mercurii a Sole in Longitudinem 3′. 57″,53 et 43″,21 in Latitudinem, parallaxi Solis horizontali 8″,5, parallaxi Mercurii a Sole 6″,8, $\frac{1}{2}$ Diametro Solis 15′. 52″,1, $\frac{1}{2}$ Diametro Mercurii 4″,1 pro contactu interno in introitu reperi Longitudinem Mercurii augeri 4″,34 Latitudinem vero imminui 5″,12, atque denotante δ correctionem differentiae ſemidiametrorum Solis et Mercurii, y vero Latitudini Mercurii inducendam pro momento coniunctionis ſequentem obtinui expreſſionem

$$20^h.\ 19'.\ 14'' + 25,87\,\delta - 20.98\,y.$$

Pari modo ex contactu interno in exitu, computata parallaxi Mercurii in Longitudinem $+0'',23$ et in Latitudinem $-2'',21$ pro momento coniunctionis ſequens obtinetur expreſſio

$$20^h.\ 5'.\ 27'' - 18,40\,\delta + 10,44\,y.$$

Vnde $\quad 13.\ 37 + 44,27\,\delta - 31,42\,y = 0.$

§. 4. Hinc patet valores in praecedenti diſſertatione pro y et δ aſſignatos non prorſus ſatisfacere aequationi ex obſervatione Bagdatenſi erutae, et exiguam aberrationem in valoribus ipſorum δ et y producere non ſpernendam in momento coniunctionis mutationem. Vt propius ad veritatem accederem ex praecedentibus disquiſitionibus aucta Latitudine Mercurii 23″ et differentia ſemidiametrorum Solis et Mercurii imminuta 0″,5 computaui denuo momenta coniunctionum ex contactibus internis Bagdati obſeruatis, prodiitque momentum coniunctionis

ex

ex introitu $20^h. 10'. 50'' + 27,56\,\delta - 23,02\,y$
ex exitu $20.\ 10.\ 5 - 18,82\,\delta + 11,16\,y$
Hinc $45 + 46,38\,\delta - 34,18\,y = 0.$

§. 5. Eodem modo reuocando ad calculum obſeruationem Petropolitanum vidi momentum contactus interni in introitu Cel. *Inochodzoff* melius ac meum conſentire cum obſervatione Bagdatenſi. Aſſumto igitur Petropoli pro contactu interno in introitu $17^h. 3'. 13''$ et pro contactu interno in exitu medio ex tribus obſeruationibus $22^h. 27'. 5''$ pro momento coniunctionis ſequentes reſultabunt expreſſiones

ex introitu $19^h. 14'. 53'' + 27,58\,\delta - 23,05\,y$
ex exitu $19.\ 13.\ 49 - 18,78\,\delta + 11,08\,y$
Vnde $64 + 46,36\,\delta - 34,13\,y = 0.$

§. 6. Collatis inter ſe his aequationibus patet eas non differre inter ſe niſi numeris abſolutis, et cum ex vtraque iidem valores pro δ et y prodire debeant, neceſſe eſt vel Bagdatenſem aberrare in defectu vel Petropolitanam in exceſſu $19''$. Cum vero coelum magis fauerit pro introitu Bagdati quam Petropoli, errorem hunc in Petropolitanam potius reiiciendum eſſe exiſtimo. Quo poſito, ac momento contactus interni in introitu ſtatuto $17^h. 2'. 54''$ obſeruatio Petropolitana ad egregium conſenſum cum Bagdatenſi reuocabitur, et pro definiendo valore ipſorum δ et y ſequens habebitur aequatio.

$$45'' + 46,37\,\delta - 34,15\,y = 0.$$

Cui poſito $\delta = -0'',2$ ſatisfacit $y = 1'',4$, poſito vero $\delta = -0'',4$ prodit $y = 0'',7$.

§. 7. Valores modo inuenti eatenus locum habere conſendi ſunt, quatenus momenta contactuum internorum Bagdati

obſeruatorum omnibus numeris exacta ſupponuntur, id circo ſine metu erroris in ſuperioribus expreſſionibus ponere licebit $\delta = -0'',4$ et $y = 0'',5$ vt ſemidiameter Mercurii ſit $= 5''$, quod etiam non nullae obſeruationes indicare videntur, et tota Latitudinis correctio $+ 23'',5$, ac obtinebitur momentum coniunctionis

Bagdati	ex introitu	$20^h.\ 10'.\ 16''$	Differ. merid.
	ex exitu	20. 10. 18	
Petropoli	ex introitu	19. 14. 0	$0^h.\ 56'.\ 16''$
	ex exitu	19. 14. 2	0. 56. 16

et Longitudo Bagdati a meridiano Pariſino numerata $2^h.\ 48'.\ 14''$ quatuor tantum minutis ſecundis diuerſa ab ea, quae in Notitia temporum ſupponitur.

§. 8. Pari modo applicata primum correctione Latitudini $+ 23''$, et differentiae ſemidiametrorum $- 0'',5$ computaui momenta coniunctionum ex obſeruationibus in diſſertatione praecedente relatis, ac obtinui ex contactu interno in exitu

Londinenſi	$17^h.\ 12'.\ 49''$	$- 18,74\,\delta + 11,02\,y$
Pariſino	17. 22. 28	- - - -
Manheim	17. 46. 33	- - - -
Lundenſi	18. 5. 11	vt ſupra
Pragenſi	18. 10. 15	- - - -
Vpſalienſi	18. 23. 9	- - - -
Stockholm.	18. 24. 47	$- 17,74\,\delta + 11,02\,y.$

In his demum expreſſionibus ſtatuendo $\delta = -0'',4$ et $y = +0'',5$ habebitur momentum coniunctionis cuilibet obſeruationi conueniens

Contact.

	Contact. internus in exitu.	Momentum coniunct.	ad mer. Paris. reductum.
Londini	$20^{b}.\ 26'.\ 51''$	$17^{b}.\ 13'.\ 2''$	$17^{b}.\ 22'.\ 40''$
Parisiis	20. 36. 28	17. 22. 41	
Manheim.	21. 0. 21	17. 46. 46	17. 22. 0
Lundae	21. 18. 47	18. 5. 24	17. 21. 58
Pragae	21. 23. 53	18. 10. 28	17. 22. 8
Vpsaliae	21. 36. 39	18. 23. 22	17. 22. 8
Stockholm.	21. 38. 18	18. 25. 0	17. 22. 5
Petropoli	22. 27. 5	19. 14. 2	17. 22. 4
Bagdati	23. 22. 52	20. 10. 18	17. 22. 0

§. 9. Pro confirmando consensu obseruationis Bagdatensis cum Petropolitana computaui effectus parallacticos pro introitu aeque ac pro exitu, pro Bagdato illum reperi $+ 14''$ hunc vero $- 32''$; pro contactu autem interno Petropolitano in introitu inueni nunc $+ 1'.\ 42''$ et in exitu $- 1'.\ 0''$. Vnde momenta contactuum ad centrum telluris reducta prodibunt sequentia

	Cont. intern. I.	ad Centr. reduct.	Cont. intern. II.	ad Centr. reduct.	Mora.
Bagdatum	$18^{b}.\ 0'.\ 5''$	$18^{b}.\ 0'.46''$	$23^{b}.22'.52''$	$23^{b}.22'.20''$	$5^{b}.21'.36''$
Petropolis	17. 2. 54	17. 4. 36	22. 27. 5	22. 26. 5	5. 21. 29
Differ. meridian.		0. 56. 10		0. 56. 15	

§. 10. Cum viderem ob variatam Latitudinem Mercurii pro Petropoli effectus parallacticos nonnihil immutari, e re esse iudicaui pro reliquis locis eosdem computare adhibitis

Latitudini Mercurii et differentiae ſemidiametrorum ſupra relatis correctionibus; calculo peracto contactus interni in exitu ad centrum reuocati atque ad meridianum Pariſinum reducti ſequentes prodiere.

	Cent. intern. in introitu	Effect. Parall.	Cont. ad Centr. reuoc.	ad mer. Paris. reductus
Londinum	$20^{b}.26'.51''$	$-1'.36''$	$20^{b}.25'.15''$	$20^{b}.34'.53''$
Lutet. Pariſ.	20. 36. 28	— 1. 39	20. 34. 47	
Manheimia	21. 0. 21	— 1. 34	20. 58. 47	20. 34. 13
Lunda	21. 18. 47	— 1. 18	21. 17. 29	20. 34. 3
Praga	21. 23. 53	— 1. 20	21. 22. 33	20. 34. 13
Vpſalia	21. 36. 39	— 1. 11	21. 35. 28	20. 34. 14
Stockholm.	21. 38. 18,4	— 1. 10,6	21. 37. 8	20. 34. 13
Petropolis	22. 27. 5	— 1. 0	22. 26. 5	20. 34. 7
Bagdatum	23. 22. 52	— 32	23. 22. 20	20. 34. 6

Tali ratione diſſenſus obſeruationum Londinenſis et praeſertim Pariſinae a reliquis a me recenſitis diminuitur quidem, ſed non penitus tollitur; videant alii qua ratione obſeruationes iſtae ad conſenſum cum reliquis reuocari queant, mihi ſatis erit per obſeruationes ſupra relatas euiciſſe momentum coniunctionis apparentis ad meridianum Pariſinum ſtatui debere $17^{b}.22'.4''$. t. v. ſiue $17^{b}.18'.36''$. t. m. Hinc ſequitur Longitudinem Mercurii Geocentricam fuiſſe $1^{s}.13°.50'.3'',3$ et Longitudini Mercurii e Tabilis Cel. *de la Lande* deductae applicandam eſſe correctionem $+3'.16'',7$ Latitudinem vero $+23'',5$ poſita ſemidiametro Mercurii $5''$, quae, ſi ad diſtantiam mediam Mercurii a Sole reducatur, prodibit $7'',2$.

OB-

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLIS
ANNO 1787. DIE $\frac{4}{13}$ IVNII HABITA
IN
OBSERVATORIO PETROPOLITANO.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Conuent. exhib. d. 22 Nou. 1787.

Die $\frac{23}{8}$ *Maii* / Iun. Merid. ver. ex alt. Solis Correſp. $22^{h}.\ 54'.\ 14'',4$
31 *Maii* / 11 Iun. - - - - - - - - $23.\ 7.\ 44,3$
$\frac{4}{13}$ Iunii - - - - - $23.\ 25.\ 42,1$

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Initium Eclipſis - - - -	$5^{h}.\ 22'.\ 30''$	$5^{h}.\ 55'.\ 36''$
Finis - - - -	$7.\ 3.\ 16$	$7.\ 36.\ 3$

Durante Eclipſi tubo Achromatico trium pedum, micrometro obiectiuo inſtructo, eodem nempe, quo vſus ſum in tranſitu Mercurii per diſcum Solis obſeruando, menſuraui non nullas partes lucidas Solis, quas dum ipſam Eclipſin ad calculum re-rocauero, conuentui Academico ſum exhibiturus.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG.
EN L'ANNÉE MDCCLXXXIV.

Suivant le nouveau Stile.

Préſinte à l'Académie le 15. *Octobre* 1787.

La déſcription des inſtrumens, leur expoſition, & ma méthode d'obſerver les variations que les changemens de l'atmoſphère y produiſent, ſe trouvent ſuffiſamment expliquées au premier volume de ces nouveaux Actes: je me contenterai donc de répéter que l'échelle du Baromètre eſt diviſée en pouces & centiemes parties de pouce de Paris, & que la graduation de mes Thermomètres à mercure eſt celle qu'on nomme de Délisle. La chaleur de l'eau bouillante y eſt marquée par zéro o, & à chaque degré répond en deſcendant une diminution d'une dix-millieme partie du volume de toute la maſſe de mercure contenue dans l'inſtrument, d'où il a été conſtaté par les

les expériences, que le froid de la congélation de l'eau, ou le o de Réaumur tombe au 150 degré, & celui de la glace pilée, mélée à parties égales avec du sel amoniac, ou le o de Fahrenheit, entre le 176 & 177 degré: c'eſt à dire que 15 degrés de Délisle font 8 degrés de Réaumur, & 5 degrés de Délisle, 6 de Fahrenheit.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure	P. cent.	jour, heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.57	4. 9. s.	27.07	16. 12. s.	150	27.82	27.934
Février	28.73	14. 4. s.	27.25	28. 6. s.	148	27.99	28.127
Mars	28.20	29. 12. s.	27.41	1. 10. s.	79	27.80	27.789
Avril	28.43	29. 9. m.	27.51	25. 9. s.	92	27.97	28.048
Mai	28.43	27. 11. m.	27.38	17. 8. s.	105	27.90	27.997
Juin	28.39	2. 6. m.	27.49	5. 3. m.	90	27.94	27.938
Juillet	28.31	30. 12. m.	27.52	18. 8. s.	79	27.91	27.916
Août	28.52	13. 3. m.	27.60	26. 10. m.	92	28.06	28.035
Sept.	28.38	4. 6. s.	27.52	13. 9. m.	86	27.95	27.988
Octobr.	28.63	4. 6. m.	27.41	17. 6. m.	122	28.02	28.257
Novembr.	28.63	1. 11. s.	27.39	19. 7. m.	124	28.01	28.014
Décembr.	28.53	27. 10. s.	26.78	4. 10. m.	175	27.65	27.912

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle; avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	Baromètre, un demi-mois au dessus de Pouces. cent.
Janvier.	18. 12	16. 3	10. 12	9. 0	8. 12	27. 907
Février	23. 6	21. 0	17. 6	14. 15	12. 18	28. 104
Mars	14. 0	8. 0	4. 0	1. 12	0. 0	27. 780
Avril	24. 0	22. 3	20. 0	15. 3	8. 21	28. 103
Mai	23. 6	19. 6	15. 3	12. 12	9. 0	27. 997
Juin	23. 9	17. 21	11. 15	4. 15	2. 3	27. 960
Juillet	19. 15	16. 9	10. 15	6. 9	3. 21	27. 918
Août	25. 9	23. 15	19. 12	13. 0	6. 9	28. 070
Sept.	23. 6	19. 3	15. 18	12. 6	7. 3	28. 025
Oct.	29. 15	28. 21	25. 6	20. 21	19. 4	28. 290
Nov.	23. 9	19. 6	14. 15	9. 9	8. 0	27. 992
Déc.	21. 18	17. 9	13. 0	9. 18	6. 21	27. 944

La plus grande hauteur du Baromètre a donc été observée en l'année 1784, le 14 Février à 4 heures après-midi de 28. 73. Therm. 170. Ciel entiérement serein, vent doux du NE.

La plus petite hauteur a été de 26. 78 le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151. Ciel à demi couvert, vent fort du SOu. La riviere charia beaucoup de glaces.

La variation totale 195, ou 1 pouce $\frac{95}{100}$.

Le milieu 27. 755.

La hauteur moyenne 27, 996: c'est à dire 27 pouces $\frac{996}{1000}$, ou de $\frac{4}{1000}$ plus petite que 28 pouces.

Le

Le Baromètre a été en cette année

269 jours 9 heures au deſſus de 27. 80
229 —— 0 —— au deſſus de 27. 90
177 —— 9 —— au deſſus de 28. 00
129 —— 6 —— au deſſus de 28. 10 &
92 —— 15 —— au deſſus de 28. 20 pouces.

Par conſéquent la hauteur, au deſſus de laquelle le Baromètre a été pendent la demi-année, ou pendant 183 jours, répond à 28. 012, ou à $28\frac{12}{1000}$ pouces. Cette hauteur eſt donc de $\frac{12}{1000}$ pouces plus grande que la moyenne.

3.) Variations conſidérables & ſubites du Baromètre.

Mois.	Temps jours heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	1. 9. m.	45	27. 02	+9°	162	SOu.	c. couvert, neige.
	3. 6. m.		28. 52		177	N.	ciel ſerein.
	9. 12. s.	24	28. 52	—57	168	SOu.	c. couvert.
	10. 12. s.		27. 95		165	SOu. ff.	c. couvert, neige.
	11. 12. m.	12	27. 38	—57	154	SOu. fort.	c. demi-couvert.
	13. 6. m.	24	27. 90	—48	169	Ou.	c. couvert, enſuite neige.
	14. 6. m.		27. 42		155	Ou.	c. couvert & neige.
	14. 12. s.	12	27. 05	—56	157	Ou. fort.	c. couvert, enſuite neige.
	15. 12. m.		27. 09		149	Ou.	c. couvert.
	16. 12. s.	24	27. 07	+4°	152	SOu.	c. couvert, neige.
	17. 12. s.		27. 49		155	S.	ciel couvert.
	19. 12. m.	36	27. 51	+46	148	S.	c. couvert, neige & pluie.
	20. 6. s.		27. 97		165	S. E.	ciel couvert.
Févr.	11. 9. m.	39	27. 73	+7°	156	E. fort	ciel demi-couvert.
	12. 12. s.		28. 43		160	E.	ciel couvert.
	27. 3. m.	39	28. 00	—75	159	N. calme	c. demi-couvert.
	28. 6. s.		27. 25		160	S. fort.	c. couvert & neige.

Mois.	Temps jours	Temps heure.	Diff. heur	Barometr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Mars.	19.	12. s.	30	28. 00	−47	170	SE.	c. demi-couvert.
	21.	6. m.		27. 53		156	Ou.	c. couv. neige.
	26.	12. s.	30	27. 92	−46	180	E.	c. ſerein.
	28.	6. m.	36	27. 46	+74	162	N.	c. couvert, neige.
	29.	6. s.		28. 20		157	NE.	c. ſerein.
	30.	6. s.	24	28. 15	−58	156	S.	c. en partie ſerein.
	31.	6. s.		27. 57		160	E. fort.	c. couv. beaucoup de neige.
Avril	1.	6. m.	24	27. 55	+47	157	E. calme	c. couv. enſuite neige.
	2.	6. m.		28. 02		157	Ou.	c. couvert.
	21.	10. s.	48	28. 17	−64	144	S.	c. couv. pluie.
	23.	10. s.		27. 53		139	S. fort.	c. demi-couvert, pluie.
	25.	10. s.	26	27. 52	+36	148	S.	c. en partie ſerein.
	26.	12. s.	24	27. 88	+32	147	Ou.	c. couv. enſuite ſerein.
	27.	12. s.	30	28. 20	+23	149	S. fort.	c. ſerein.
	29.	6. m.		28. 43		150	E.	c. ſerein.
Mai	9.	6. m.	39	27. 45	+55	148	NOu. fort.	c. en partie ſerein.
	10.	9. s.	33	28. 00	+28	154	NE.	c. couvert, neige.
	12.	6. m.		28. 28		154	NOu. fort	c. en partie ſerein.
	16.	12. s.	20	28. 01	−63	147	NOu.	c. demi-couvert.
	17.	8. s.	22	27. 38	+32	146	NOu. fort	c. couv. beauc. de pluie.
	18.	6. s.	36	27. 70	+43	144	NOu. fort	c. demi-couv. pluie, neige.
	20.	6. m.		28. 13		150	NOu.	c. ſerein.
	20.	12. m.	42	28. 13	−59	138	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	22.	6. m.	17	27. 54	+27	142	NOu. ff.	c. couvert, pluie.
	22.	11. s.		27. 81		143	calme.	c. couvert.
	24.	8. s.	15	28. 06	−33	137	NOu.	c. couvert.
	25.	11. m.		27. 73		136	Ou. ff.	c. couv. & beauc. de pluie.

* ff déſigne un vent très fort.

Mois

Mois.	Temps jours heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{165}$	Différ. $\frac{1}{165}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Mai	25. 12. s.	34	27. 87	+56	138	Ou. ff.	c. demi-couvert.
	27. 10. m.		28. 43		138	NE. fort.	c. demi-couvert.
Juin.	2. 9. m.	24	28. 38	−47	130	NOu. fort.	c. ſerein.
	2. 12. s.		28. 27		135	NOu.	c. ſerein.
	3. 12. s.		27. 80		136	Ou. fort.	c. demi-couvert, pluie.
	4. 11. m.	16	27. 90	−40	124	E.	c. ſerein.
	5. 3. m.	33	27. 50	+47	133	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	6. 12. m.		27. 97		135	NOu.	c. couvert.
Août	26. 10. m.	20	27. 60	+43	120	Ou. ff.	c. couv. beaucoup de pluie.
	27. 6. m.		28. 03		130	NE.	c. demi-couvert.
	27. 3. s.	18	28. 03	−41	129	SE. fort.	c. demi-couvert.
	28. 9. m.		27. 62		130	S.	c. couv. beaucoup de pluie.
Sept.	3. 6. m.	30	27. 98	+39	139	N.	c. couv. pluie.
	4. 12. m.		28. 37		134	NOu.	c. ſerein.
	11. 12. m.	21	27. 83	−31	136	Ou.	c. demi-couv. enſuite pluie.
	12. 9. m.		27. 52		137	Ou.	c. couv. pluie copieuſe.
Oct.	8. 3. m.	24	28. 20	+34	146	N.	c. couvert, pluie.
	9. 3. m.		28. 54		146	Ou.	c. couvert.
	11. 6. m.	42	28. 03	+38	145	Ou.	c. demi-couv. enſuite ſerein.
	12. 12. s.	24	28. 41	−38	148	Ou.	c. couvert, enſuite pluie.
	13. 12. s.	21	28. 03	+29	148	NOu.	c. demi-couvert.
	14. 9. s.		28. 32		154	E.	c. ſerein, enſuite couvert.
	16. 6. m.	24	28. 05	−64	143	Ou. fort.	c. couvert.
	17. 6. m.	36	27. 41	+69	144	Ou. fort.	c. couv. pl. puis c. demi-couv.
	18. 6. s.		28. 10		151	N.	c. ſerein.
Nov.	11. 12. s.	36	28. 00	−53	150	S. ff.	c. couvert.
	13. 12. m.		27. 53		145	S.	pluie & neige, c. couvert.

Mois.	Temps jours heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	15. 3. s.	21	28. 12	—39	149	SOu.	c. demi-couvert.
	16. 12. m.		27. 73		139	NOu. fort.	c. couvert, pluie.
	17. 12. s.	30	27. 98	—59	146	SE.	c. couvert, enſuite pluie.
	19. 6. m.		27. 39	+69	147	SOu. ff.	c. demi-couv. pluie cop. neige.
	20. 6. m.	24	28. 08		149	E.	c. couvert.
Nov.	24. 12. m.	45	27. 61	+71	150	S.	c. couvert.
	26. 9. m.		28. 32		160	E.	brouillard, c. demi-couvert.
	28. 6. m.	16	28. 08	—31	148	Ou.	c. couvert, enſuite pluie.
	28. 10. s.		27. 77		145	SOu. fort.	pluie.
	29. 6. s.	15	27. 76	+25	148	N.	c. couv. & neige.
	30. 9. m.		28. 01		155	NOu. calm	c. ſerein.
	3. 2. m.	32	27. 68	—90	156	SOu. fort	c. couvert, enſuite neige.
	4. 10. m.		26. 78	+59	151	SOu. ff.	c. demi-couv. puis neige.
	5. 9. s.	35	27. 37		166	calme S.	c. couv. charie des glaçons.
	6. 12. m.	28	27. 18	+71	162	variable.	brouillard, neige, aurore bor.
	7. 4. s.		27. 89		168	E.	c. couvert.
	8. 12. m.	24	27. 57	+45	161	E.	brouillard, beauc. de neige.
Déc.	9. 12, m.		28. 02		163	E.	c. couvert, enſuite ſerein.
	10. 3. s.	19	27. 70	+44	150	SE. fort	beaucoup de neige, c. couv.
	11. 10. m.		28, 14		154	S.	c. demi-couvert.
	15. 12. m.	34	27. 76	+46	155	NE.	c. couvert, neige.
	16. 10. s.		28. 22		162	NOu.	c. couv.
	18. 8. s.	40	28. 47	—70	170	calme SOu	brouillard, c. demi-couvert
	20. 12. m.		27. 77		160	SE.	neige, c. couvert.
	21. 4. m.		27. 63		151	S.	c. couvert.

La

La descente la plus considérable du Baromètre à donc été de $\frac{2}{15}$ pouce en 32 heures, le 3 Décembre: & la montée la plus considérable de $\frac{2}{10}$ pouces en 45 heures, le 1. Janvier.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extremes.						Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas			Au plus haut.				Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour	heure.	Degré.	jour	heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	188	30.	7. m.	147	16.	2. s.	41	166,3	160,1
Février	183	17.	7. m.	150	21.	2. s.	33	170,4	160,4
Mars	183	5.	6. m.	142	8.	2. s.	41	171,7	155,2
Avril	161	10.	6. m.	127	21.	2. s.	34	150,7	136,5
Mai	158	11.	6. m.	122	2.	2. s.	36	146,8	136,6
Juin	146	6.	6. m.	111	23.	2. s.	35	135,2	124,7
Juillet	134	16.	6. m.	103	29.	2. s.	31	126,7	115,2
Août	132	21. 27.	6. m.	109	4. 14.	2. s.	23	126,9	115,9
Sept.	150	30.	6. m.	126	8.	2. s.	24	141,4	133,2
Octobr.	154	12. 14.	6. m. 11. s.	138	20. 29.	2. s.	16	145,7	142,1
Novem.	167	25.	11. s.	139	16.	2. s.	28	152,0	148,9
Décem.	177	28.	7. m.	146	12.	2. s.	31	163,6	157,1

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Froid plus grand que					Chaleur plus grande que					
	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.
Janv.	2	9	22	31	31					5	14
Févr.	4	14	26	29	29					1	13
Mars	5	17	29	31	31					4	24
Avril			1	15	30			3	22	30	30
Mai				9	28			4	23	30	31
Juin					7		5	25	30	30	30
Juillet						8	21	31	31	31	31
Août						4	24	31	31	31	31
Sept.				1	18			6	23	30	30
Oct.				9	31				4	31	31
Nov.			2	22	30				1	21	30
Déc.		10	20	31	31					4	18
1784.	11	50	100	178	266	12	50	100	165	248	313

Nous tirons de ces deux Tableaux les conclusions suivantes.

Le plus grand froid, qui surpasse ordinairement 200^d. n'a été cette année-ci que de 188^d, ou suivant le Thermomètre de Réaumur de $20\frac{1}{3}$, le 30 Janvier à 7 heures du matin: Baromètre 27, 98, ciel serein, vent d'Ouest.

La plus grande chaleur a été observée de 103^d, ou de 25^d de Réaumur le 29 Juillet à 2 heures après midi: Baromètre 28. 27, ciel serein parsémé de quelques nuages, vent d'Est.

La

La différence entre ces deux extrémités de froid & de chaleur eſt de 85 degrés de Délisle, ou $45\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen de toute l'année; c'eſt-à-dire la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées le matin & le ſoir, diviſée par leur nombre, a été trouvé de $149^d.\ 7$, ou bien de $\frac{3}{15}$ degré moindre que le froid de la congélation de l'eau.

La chaleur moyenne de toute l'année, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 h. après midi, diviſée par leur nombre, a été de $140^d.\ 4$, qui répond à une chaleur de $5\frac{1}{10}$ degrés ſelon la graduation de Réaumur.

Séparons encore, comme nous l'avons fait dans nos extraits précédens, les mois d'hyver, Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre, des mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre, & nous trouvons pour ceux-là:

le froid moyen $162^d.\ 5$ de Délisle, ou $6\frac{2}{3}$ degrés de Réaumur.

la chaleur moyenne 153^d, de Délisle, qui répond ſuivant Réaumur à un froid d'$1\frac{2}{3}$ degré.

Et pour les ſix mois d'été:

le froid moyen 137^d, qui ſuivant Réaumur répond à une chaleur de $6\frac{5}{6}$ degrés.

la chaleur moyenne 127,9, ou ſuivant Réaumur de $11\frac{2}{3}$ degrés.

Il n'y a eu cette année que 11 jours, où le froid à ſurpaſſé 180^d, 50 jours, où il a été plus grand que de 170^d, 100 jours où il a été plus grand que 160^d, & 178 jours où l'eau a ſimplement gélé.

Enſuite il y a eu 12 jours où il a fait plus chaud que 110$^{d.}$, 50 jours où il a fait plus chaud que 120$^{d.}$, 100 jours où la chaleur à ſurpaſſé 130$^{d.}$, 165 jours où elle a été plus grande que 140$^{d.}$, & 248 jours où il n'a point gélé, au moins à midi.

Indiquons ces jours plus en détail.

Le froid a été obſervé entre

		jours
180 & 190	le 29. 30 Janv. le 15. 16. 17. 19 Févr. le 5 18. 19. 27 & 29 Mars - - -	11
170 & 180	le 2 — 6. 28. 31 Janv. le 1 — 5. 14. 18. 20. 22. 24 Févr. le 4. 6. 15 — 17. 22 — 26. 28. 30 Mars, & le 6. 7. 17. 18. 19. 22. 23. 26 — 28 Décembre - - -	39
160 & 170	le 1. 7 — 13. 20 — 22. 26. 27 Janv. le 6 — 10. 13. 21. 23. 25. 26. 28. 29, Févr. le 1 — 3. 7. 9 — 12. 14. 20. 21. 31 Mars, le 10 Avril, le 25. 26 Nov. & le 5. 8. 9. 15. 16. 20. 24. 25. 29. 31 Décembre -	50
150 & 160	le 14 — 19. 23 — 25 Janv. le 11. 12. 27 Févr. le 8. 13 Mars, le 1 — 9. 11 — 13. 28. 29 Avril, le 4. 5. 7. 8. 10 — 13. 20 Mai, le 30 Sept. le 1. 3. 11. 12. 14. 15. 18. 30. 31 Octobre, le 1. 2. 4 — 12. 14. 15. 19. 20. 23. 24. 27. 29. 30 Novembre, & le 1 — 4. 10 — 14. 21. 30 Décembre.	78

La

La chaleur a été obſervée entre

110 & 100	le 9. 10. 13. 24. 28 — 31 Juillet, & le 4. 6. 14. 25 Août - - - -	jours 12
120 & 110	le 19. 21. 23. 28. 29 Juin, le 2. 4. 6 — 8. 11. 12. 16. 20 — 24. 27 Juillet & le 1 — 3. 5. 7 — 9. 11 — 13. 15 — 19. 21 — 23. 26 Août - - - -	38
130 & 120	le 21. 29. 30 Avril, le 1. 2. 30. 31 Mai, le 1 — 4. 9 — 11, 13 — 18 20. 22. 24 — 27. 30 Juin, le 1. 3. 5. 14. 15. 17 — 19. 25. 26 Juillet, le 10. 20. 27 — 31 Août, & le 1. 5 — 9 Septembre - - -	50
140 & 130	le 4 — 7. 10. 12 — 20. 22 — 25. 28 Avril, le 3. 5 — 9. 15 — 17. 19 — 28 Mai, le 5 — 8. 12 Juin, le 2 — 4. 10 — 12. 14. 15. 18 — 26 Sept. le 19 — 21. 29 Oct. & le 16 Novembre - - - -	65
150 & 140	le 15 — 17. 19. 23 Janv. le 27 Févr. le 8. 12. 13. 30 Mars, le 1. 2. 3. 8. 9. 11. 26. 27 Avril, le 4. 10. 12 — 14. 18. 29 Mai, le 13. 16. 17. 27 — 30 Sept. le 1 — 18. 22 — 28. 30. 31 Oct. le 1 — 4. 10 — 15. 17 — 23. 27 — 29 Nov. & le 10. 12 — 14 Décembre - - - - -	83

III. Vent.

Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	5	20	5	1	2	0	6	2	3	6	7	5
Févr.	9	8	12	0	8	3	6	4	4	4	0	0
Mars	10	18	3	0	3	2	6	3	7	1	6	3
Avril	13	9	8	0	5	1	8	2	7	1	6	0
Mai	3	6	19	3	2	11	0	0	0	0	8	10
Juin	9	16	5	0	1	3	8	1	1	0	9	7
Juillet	8	16	7	0	3	2	3	5	1	2	15	0
Août	7	7	16	1	2	2	1	1	4	7	11	3
Sept.	5	16	6	3	3	3	2	1	0	0	14	7
Oct.	8	18	5	0	2	2	3	2	4	3	14	1
Nov.	2	20	5	3	2	1	4	2	10	10	0	1
Déc.	6	19	5	1	2	3	5	3	4	7	6	1
Année 1784.	85	173	96	12	35	33	52	26	45	41	96	38

D'où l'on conclud que le mois de Mai a été le plus venteux, & après lui les mois d'Août, de Novembre & de Septembre. Le mois le moins venteux, ou le plus calme a été Mars, & après lui Juin, Avril & Octobre.

Le vent dominant de l'année a encore été celui de l'Oueſt, lequel a ſurtout regné aux mois de Juillet, Septembre, Octobre & Août.

Le

Le rapport des quatre plages a été: Nord, 70: Eſt, 82: Sud, 78: Oueſt, 136.

La direction des vents forts a été

Direction	Jours	Nombre des Jours.
Nord.	le 3 Mai - - - - - - - - -	1
NE.	le 10 Février, 30 Avril, 1. 27 — 30 Mai, 27. 28 Août, & le 16 Septembre - - - -	10
Eſt.	le 24 Janvier, 7. 9. 11 Févr. 31 Mars, & le 22 Novembre - - - - - - - -	6
SE.	le 2. 8. 29 Févr. 19 Avril, 18. 24 Juillet, 24 Sept. & le 10 Decembre - - - -	8
Sud.	le 3. 4. 6. 28 Févr. 1. 2 Mars, 21. 22. 23. 25 Avril, 16 Juillet, 14. 24. 30 Août, 12 Novembre & le 21 Décembre - - - -	16
SOu.	le 1. 10. 11 Janv. 5 Févr. 28 Avril, 19 Juillet, 1. 8. 23. 31 Août, 7 Oct., 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Decembre - -	20
Oueſt.	le 13. 15 Janv. 24 Avril, 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, 3. 4. 28 Juin, 1. 7. 20 Juillet, 2 — 5. 15. 22. 29 Août, 1. 2. 18. 25. 26 Sept. 10. 15. 16. 17 Oct. & le 2 Décembre - -	33
NOu.	le 9. 12. 17 — 20. 22. 24. 26 Mai, 2. 5 Juin, 16 Août, & le 9. 10 Septembre - - -	14

	Entre ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux du	
Sud.	12 Novembre - - - - - - -	1
SOu.	du 10 Janv. 1 Août, 18. 19 Nov. & du 3 Décembre - - - - - - - - -	5
Oueſt.	du 8. 25 Mai, & du 25. 26 Septembre - - -	4
NOu.	du 22 Mai & du 9 Septembre - - - -	2

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ferein jours.	Ciel. couvert jours.	Brouillard jours.	Pluie. forte jours	Pluie. petite jours.	Neige. copieuſe jours.	Neige. petite jours.	Eau de pluie & de neige Pouces $\frac{1}{100}$
Janv.	5	16	2		1	2	12	0 21
Févr.	4	11	9		0		8	0 49
Mars	4	11	6		0	9	16	1 17
Avril	17	7	7		9		2	0 24
Mai	11	5	0	3	8		6	0 88
Juin	5	9	0	7	10		1	3 60
Juillet	8	3	1	7	10		0	1 90
Août	8	4	0	6	6		0	1 60
Sept.	6	6	6	7	8		1	1 00
Oct.	4	15	4	1	11		1	0 81
Nov.	2	19	2	2	8		12	2 00
Déc.	1	12	10		1	3	7	1 21
Année 1784.	75	118	47	33 | 72 = 105		14 | 66 = 80		15 11

Il tomba de la grêle le 5. 15 & 16 Juillet.

Il y eut cette année 8 orages complets, le 31 Mars à 11 h. du ſoir, quoique dans un grand éloignement, le 12 & 19 Juin, le 5 Juillet, & le 4. 6. 25. 30 Août. Il ne fit que tonner de loin, le 25 & 29 Juin, le 9 & 11 Juillet, & le 9 Septembre.

Le nombre des aurores boréales ne monte qu'à 7; dont deux furent très ſplendides, ſavoir ceux du 8 Avril & du 29 Décembre: les autres obſervées le 29 Mars, le 12. 21 & 30 Août & le 6 Décembre furent moins conſidérables.

Le Neva débacla le 25 Avril, après avoir été priſe pendant 160 jours: Baromètre 27. 70 à 27. 52 pouces, Thermomètre de Délisle depuis 149 à 134, vent du Sud mediocrement fort, pluie, ciel en grande partie couvert. Les glaçons du lac de Ladoga parurent le 4 Mai, & la riviere les charia, le 6. 8 & 9 du même mois.

Les glaces reparurent le 2 Décembre, & la riviere en fut priſe dans la nuit du 5 au 6 Décembre. Baromètre 27. 35, Thermomètre 165, ciel couvert en grande partie, & vent du Sud, presque inſenſible.

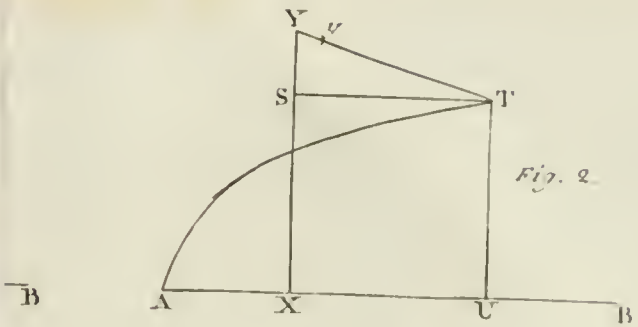


Fig. 2.

Fig. 5.

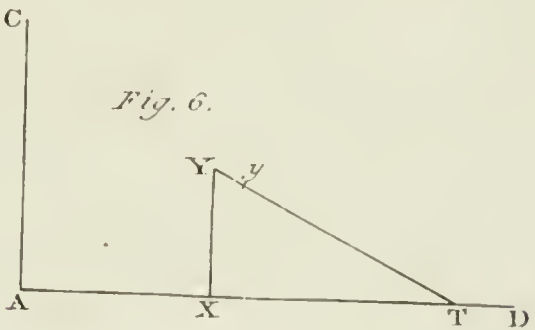


Fig. 6.

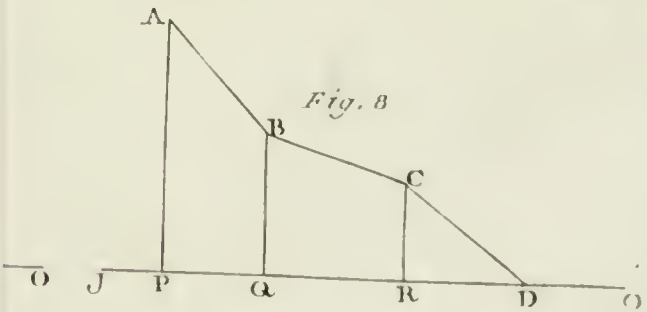


Fig. 8

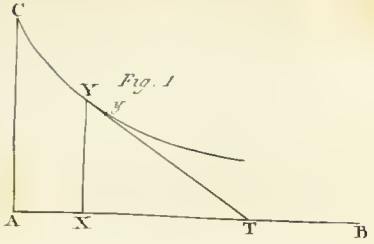


Fig. 1

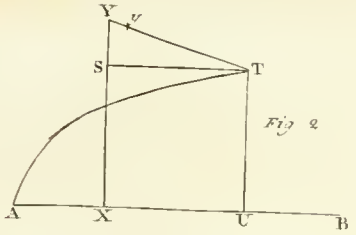


Fig 2

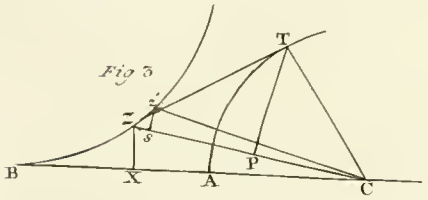


Fig 3

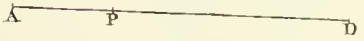


Fig 5.

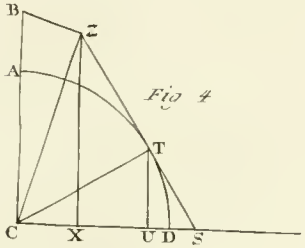


Fig 4

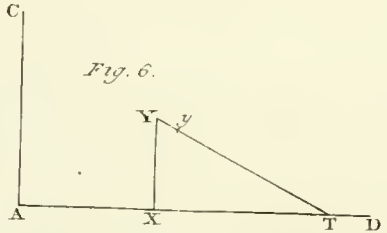


Fig. 6.

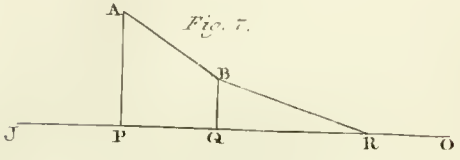


Fig. 7.

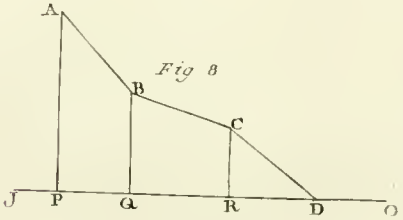


Fig 8

Fig. 2.

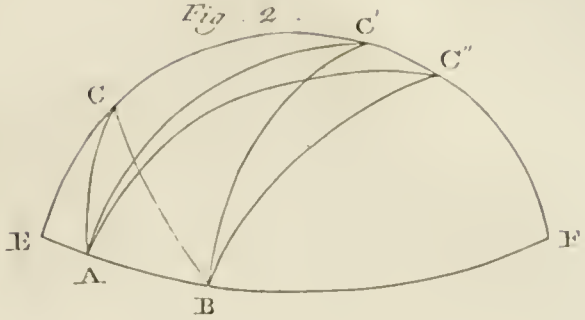
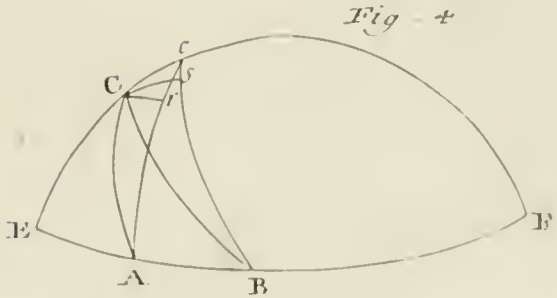


Fig. 4.



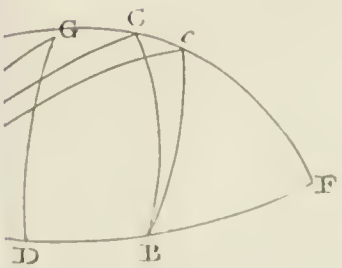


Fig. 1.

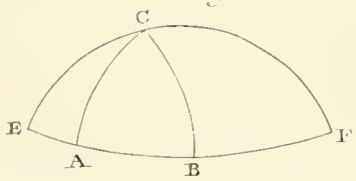
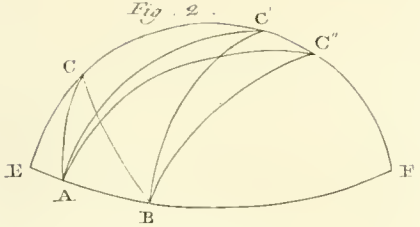


Fig. 2.



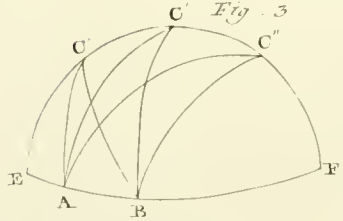


Fig. 3

Fig 4

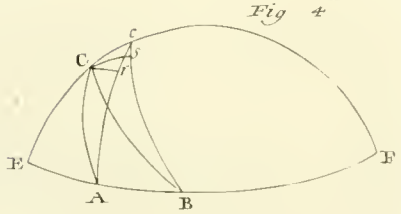
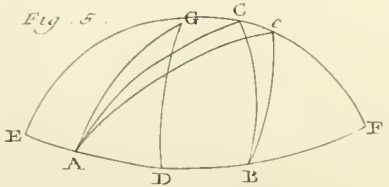
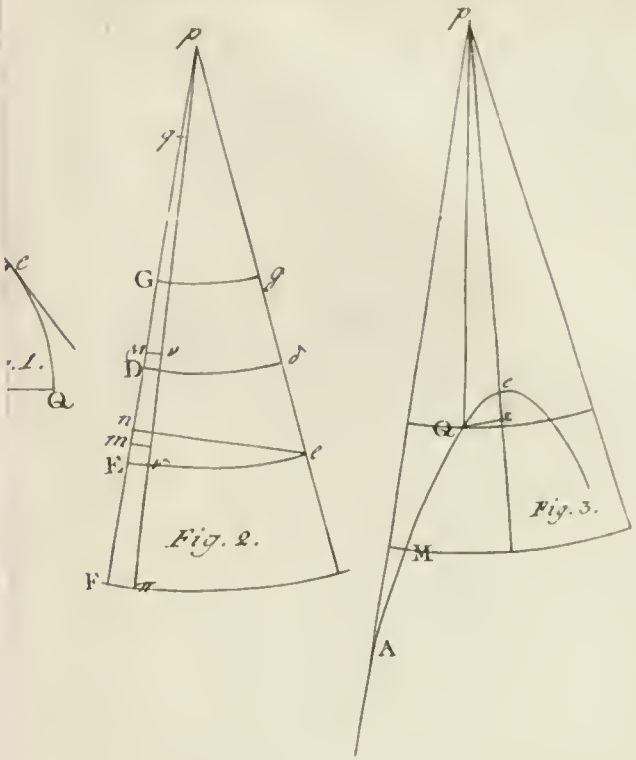
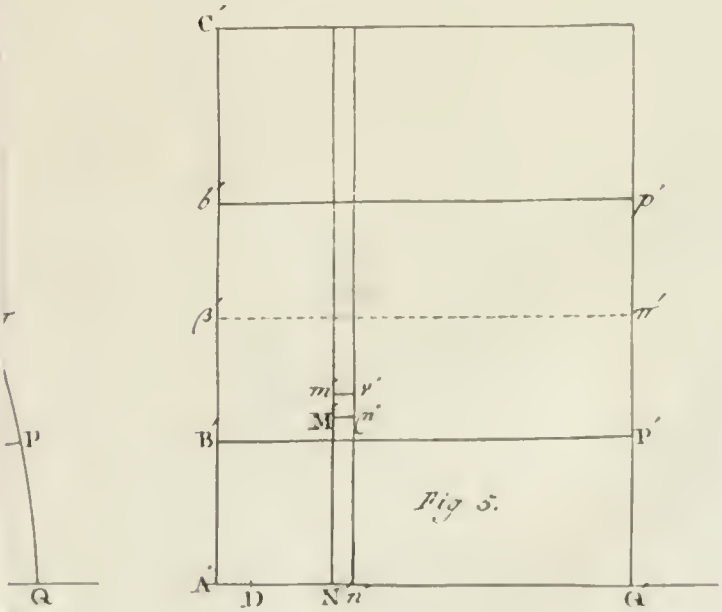


Fig. 5.




P
G
g
D
d
n
m
E
e
F
f
Q
A
M
Fig. 2.
Fig. 3.


C'
b'
p'
β'
m'
m'
n'
B'
P'
A'
D
N
n
Q
Fig 5.

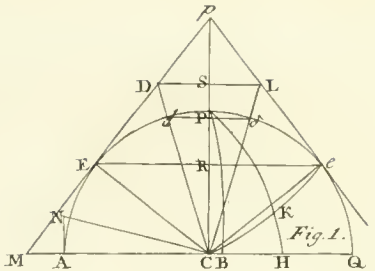


Fig. 1.

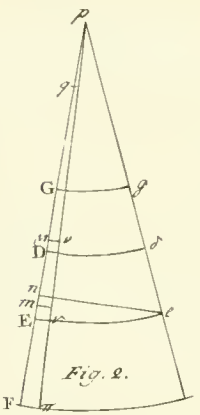


Fig. 2.

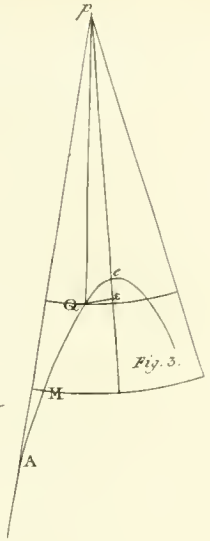


Fig. 3.

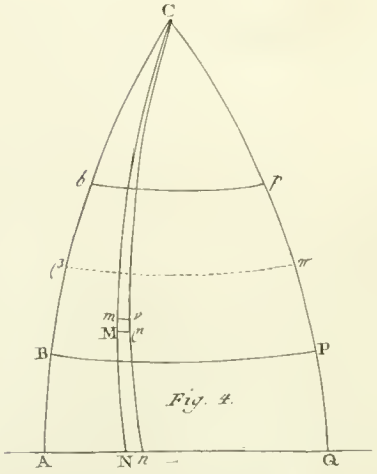


Fig. 4.

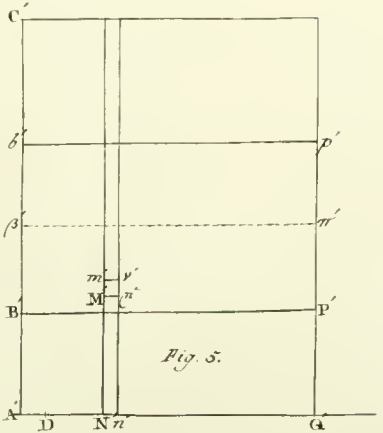


Fig. 5.

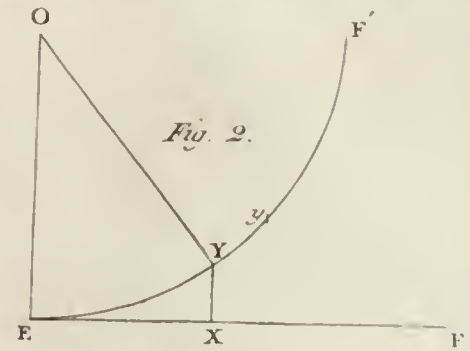


Fig. 2.

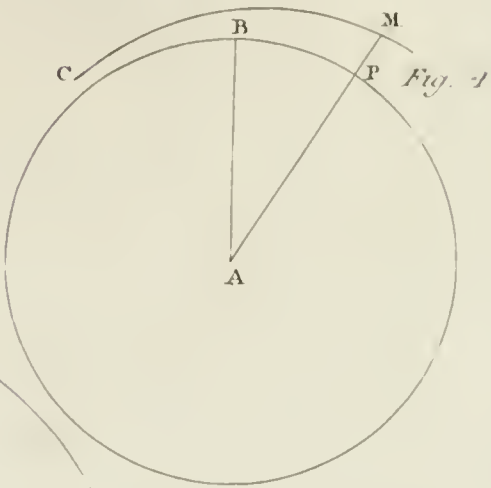
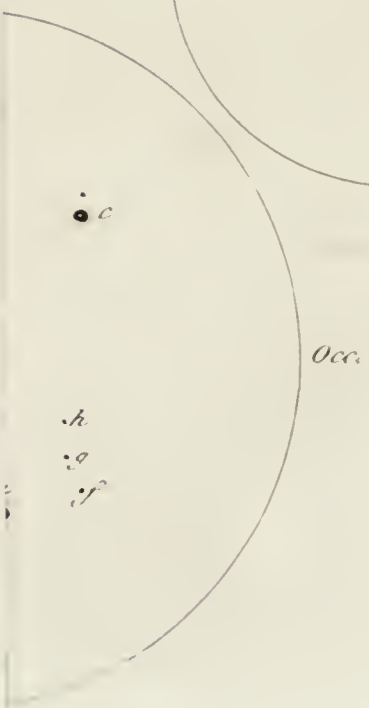


Fig. 1



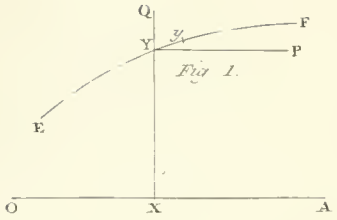


Fig. 1.

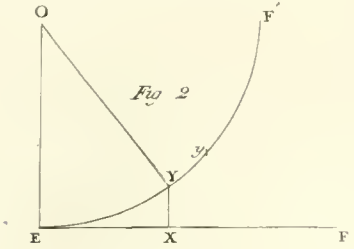


Fig. 2

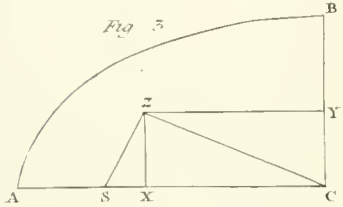


Fig. 3

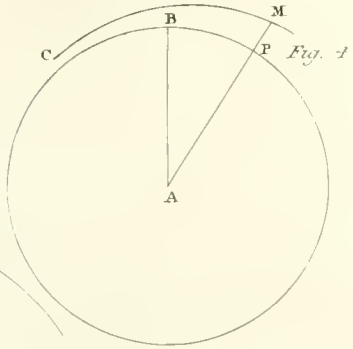
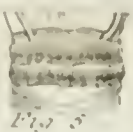
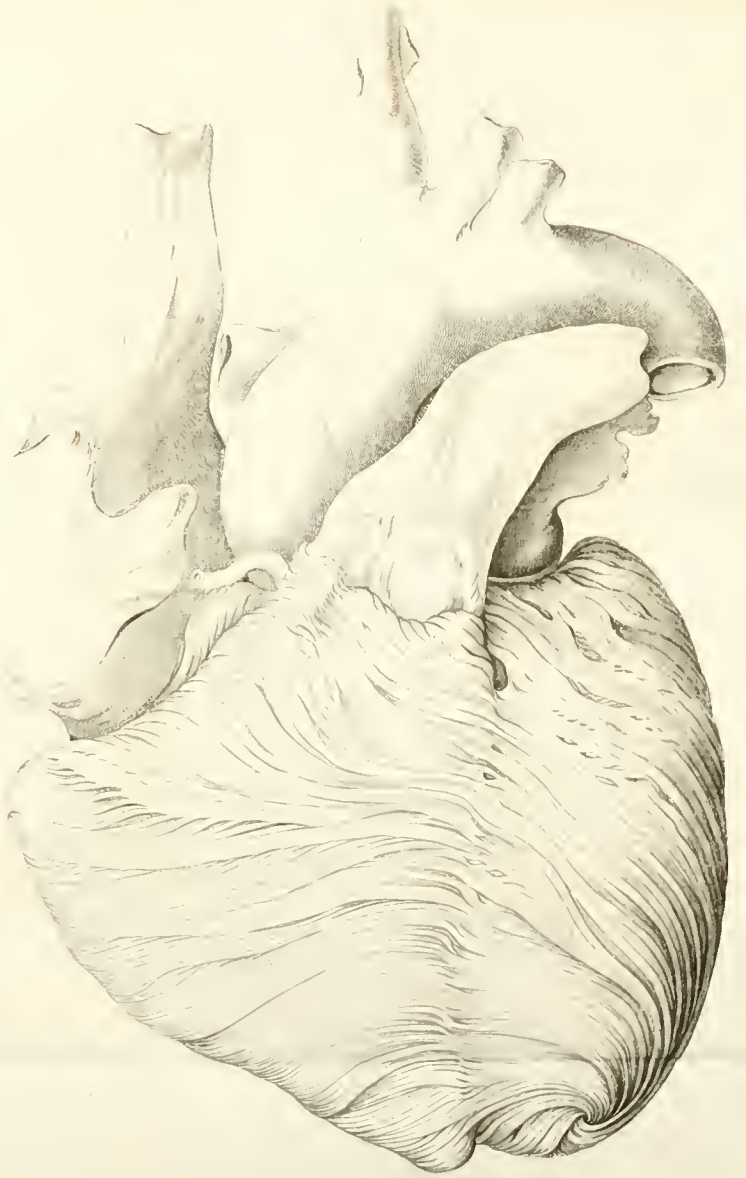


Fig. 4

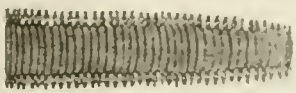
Fig. 5.

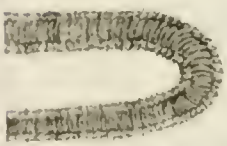
Y
l.
m
F
g
y
V
o
z
G
L
k
I





ad 8.





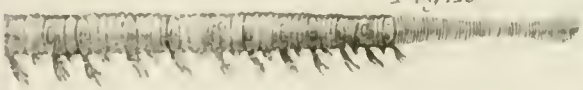
A

a

b

Fig. 21

Fig. 19

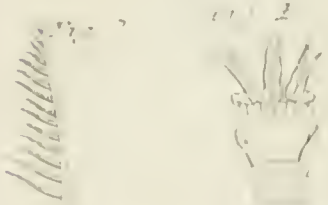


B

Fig. 21

b

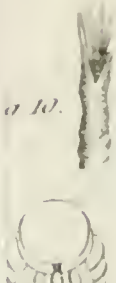
c



a a

Fig. 9.

a 10.



a a

Fig. 9.

Fig. 5

Fig. 5

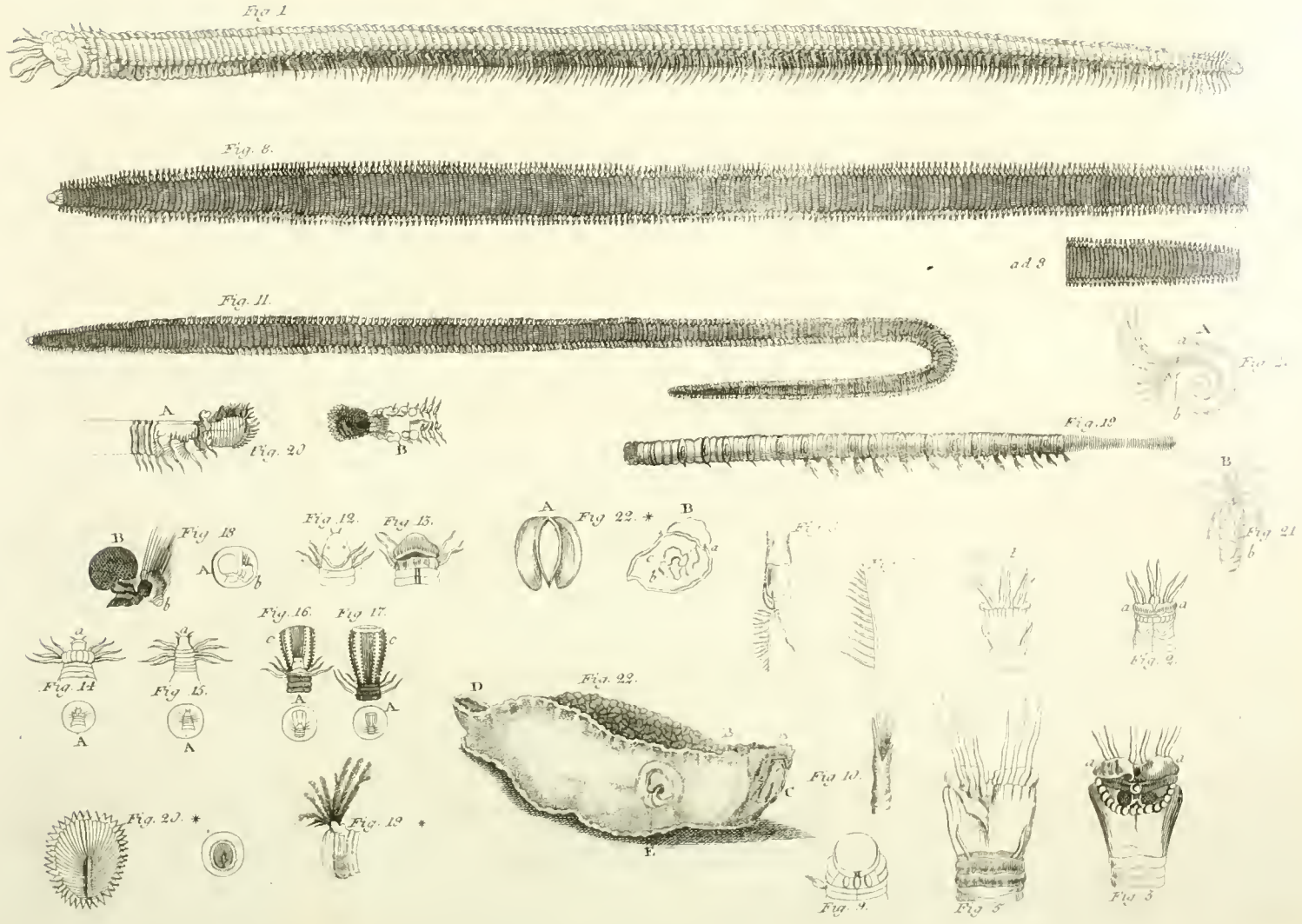
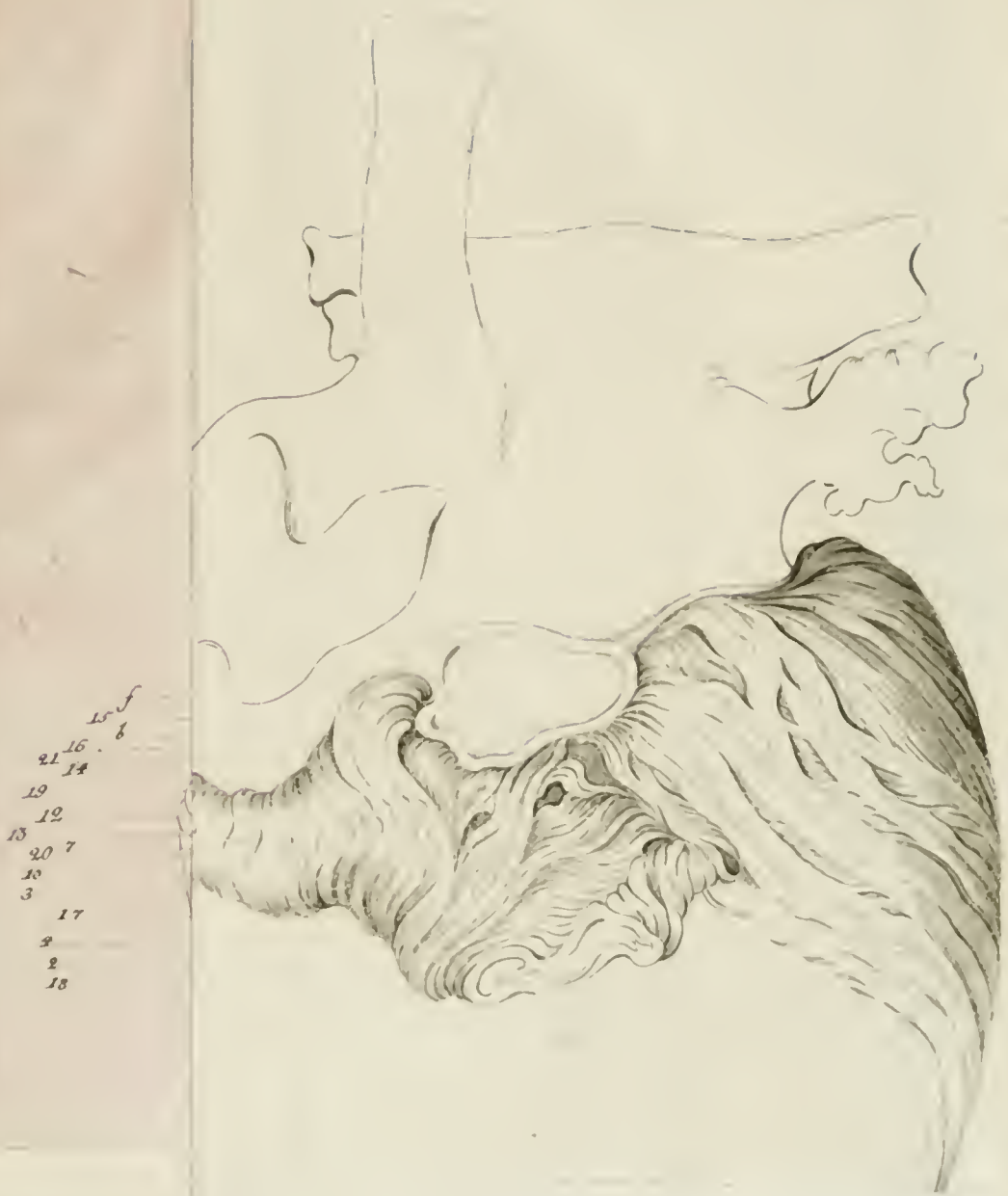


Fig. 1
Fig. 8.
ad 8
Fig. 11.
A
Fig. 20
B
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 18
B
A
b
Fig. 16.
Fig. 17.
c
c
Fig. 14
Fig. 15.
a
a
A
A
A
A
Fig. 20. *
Fig. 19 *
A
Fig. 22. *
B
a
b
c
Fig. 22.
D
C
E
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 5
Fig. 3
a
a
Fig. 2.
Fig. 21
b
Fig. 12


15
5
16
21
14
19
12
13
20
7
10
3
17
4
2
18

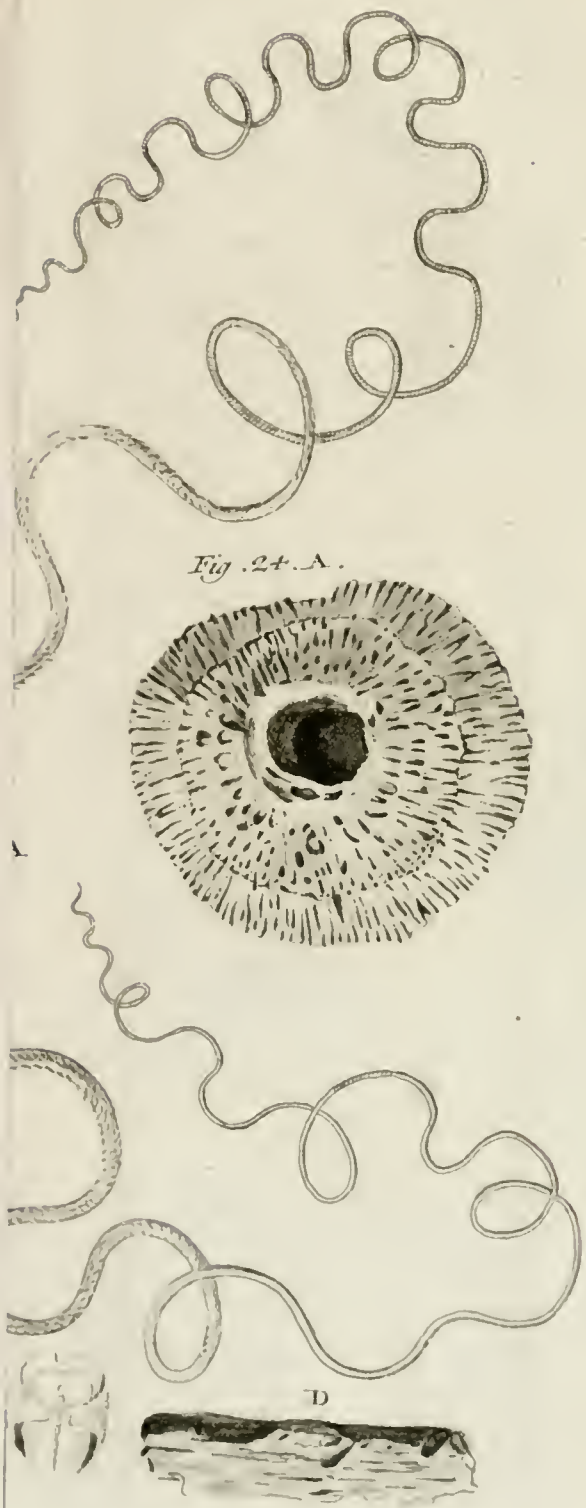


Fig. 24. A.
D

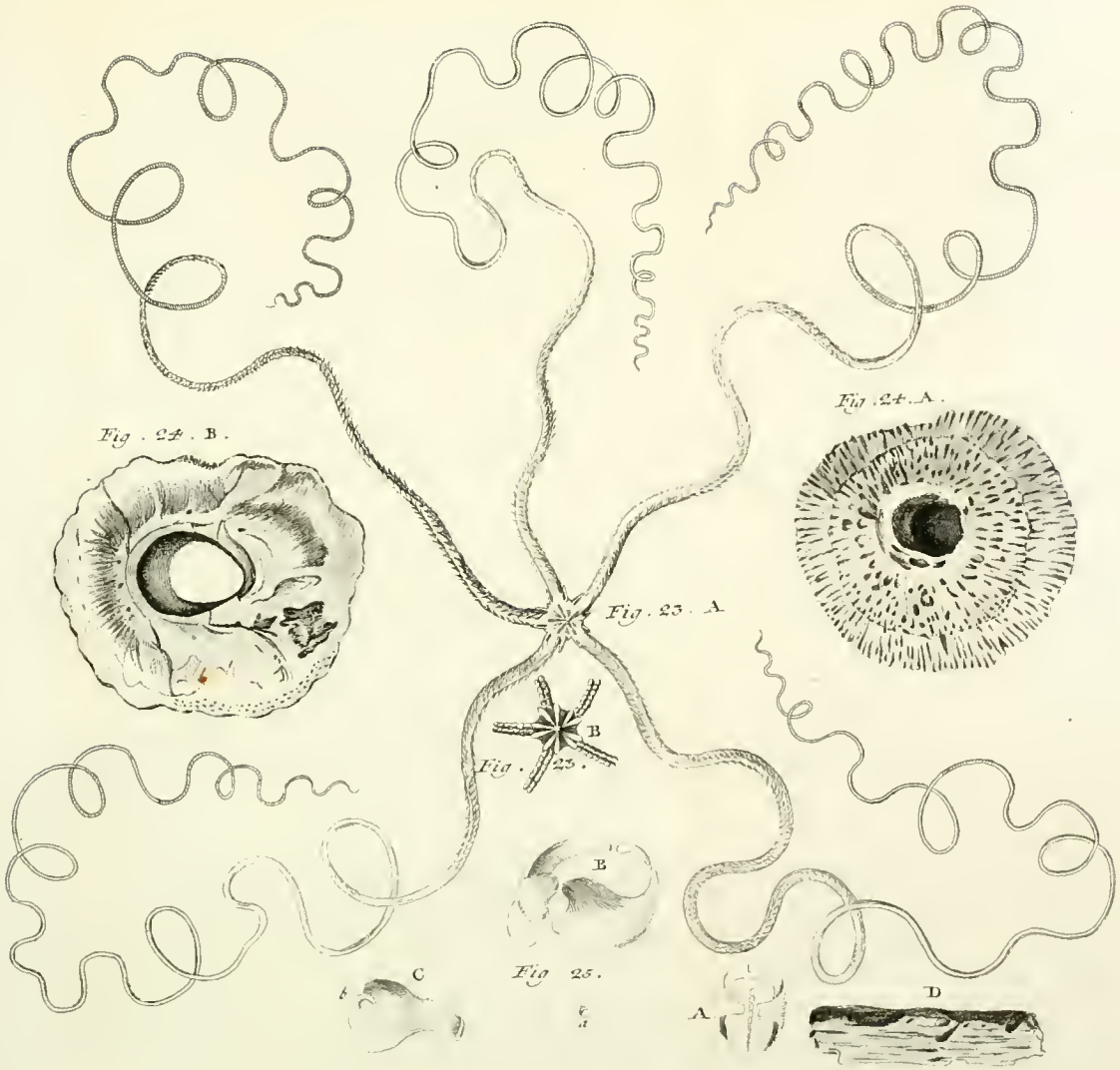


Fig. 24. B.
Fig. 24. A.
Fig. 23. A.
B
Fig. 23.
B
Fig 25.
C
b
a
A
D

Fig. 34.

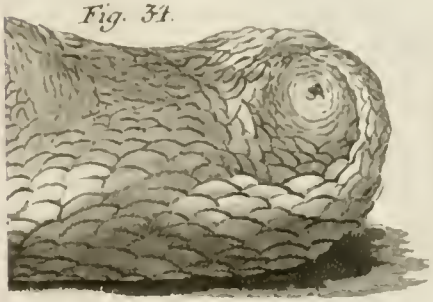


Fig. 26.

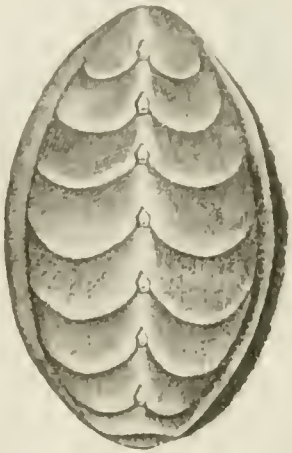


Fig. 35.

Fig. 37.

Fig. 30.

Fig. 27.

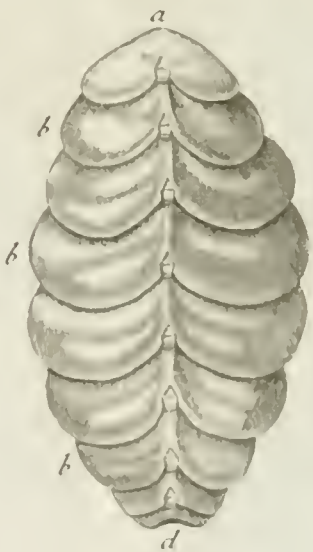
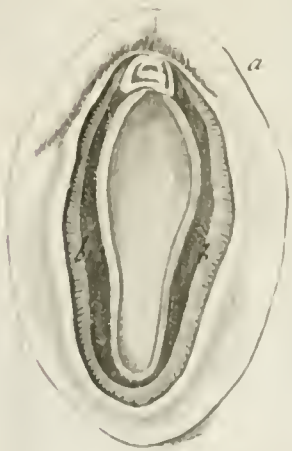


Fig. 28.



29.

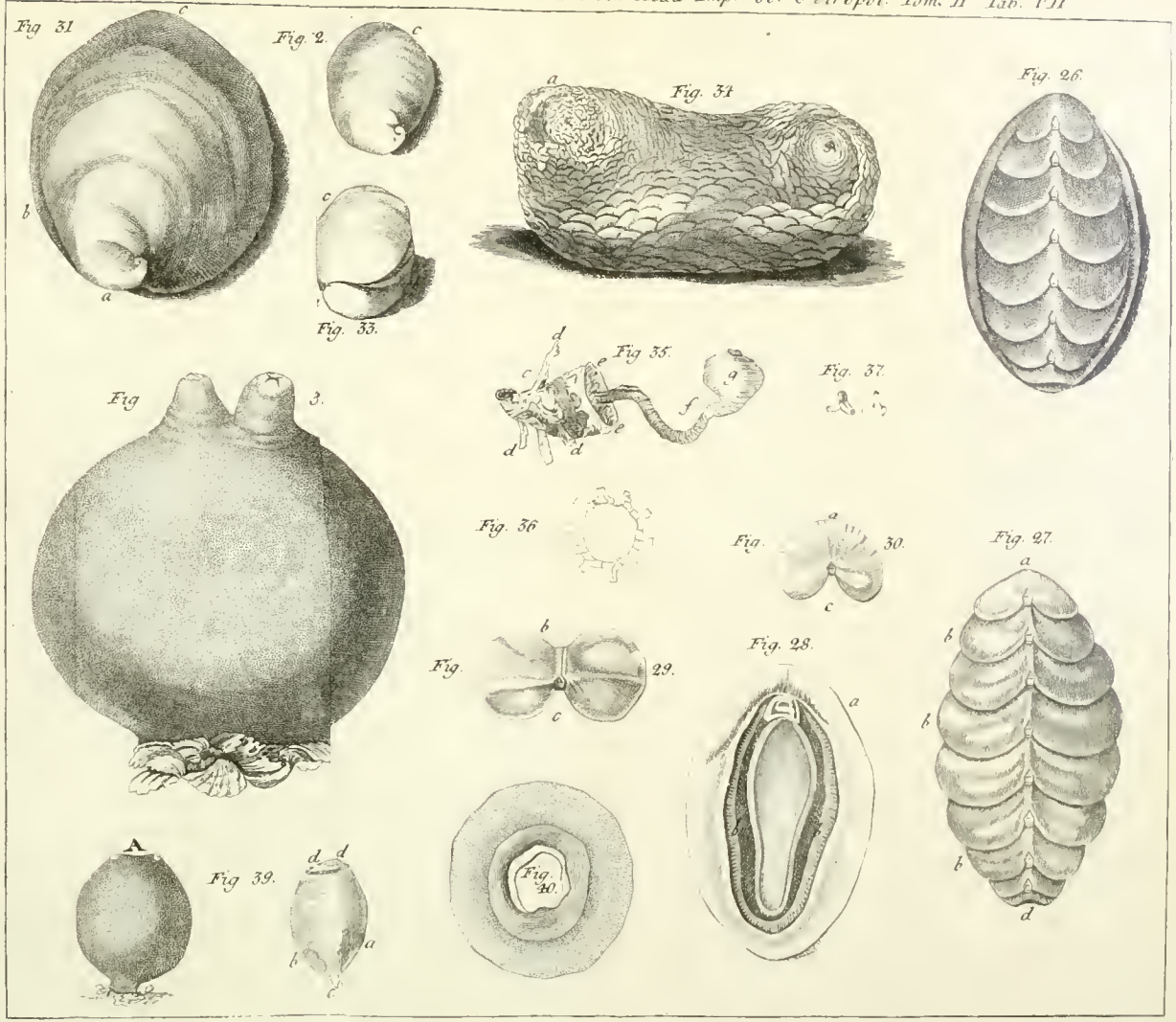
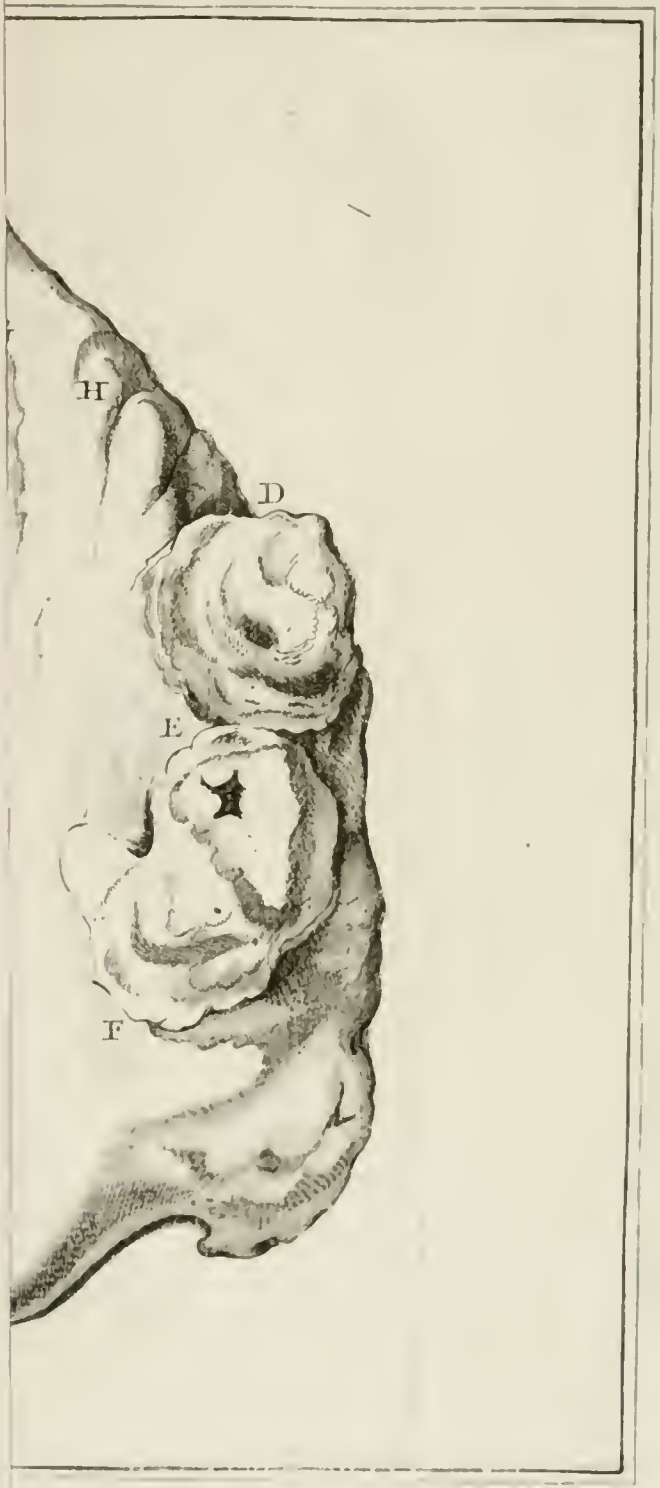
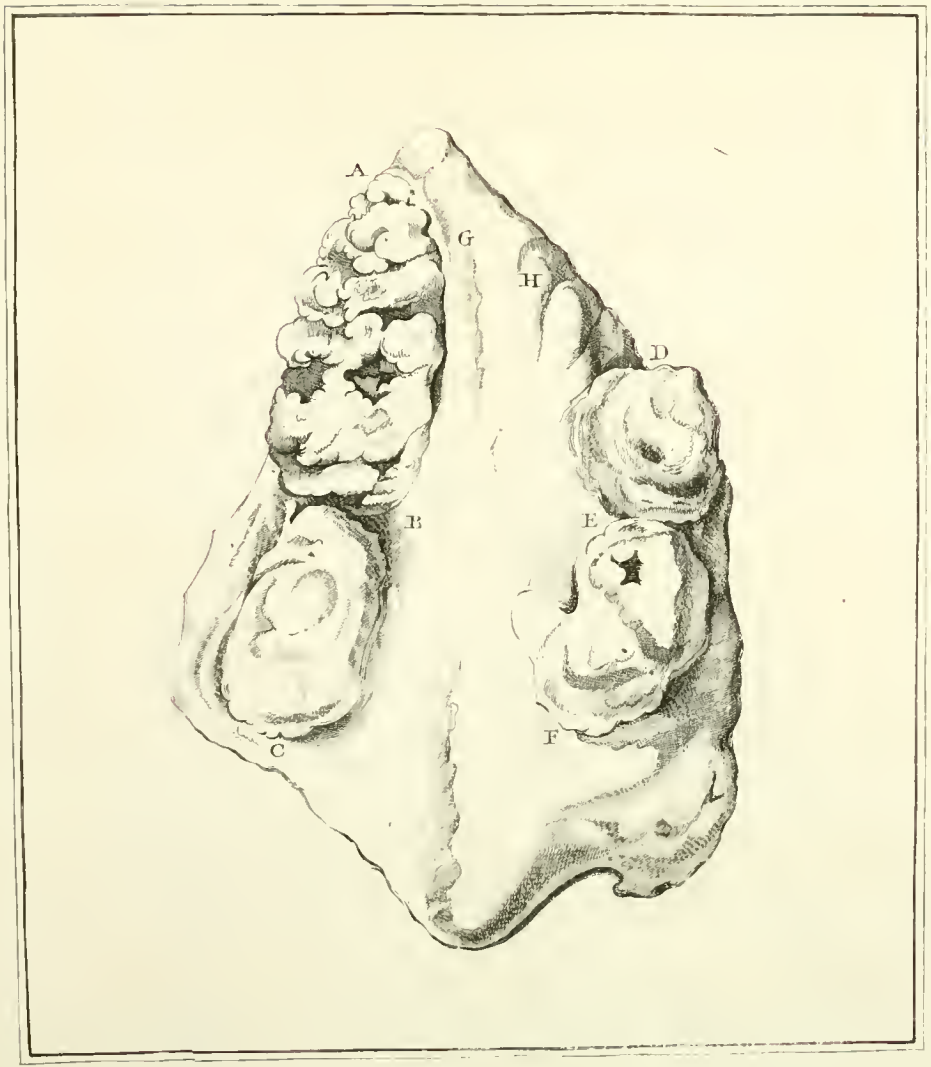
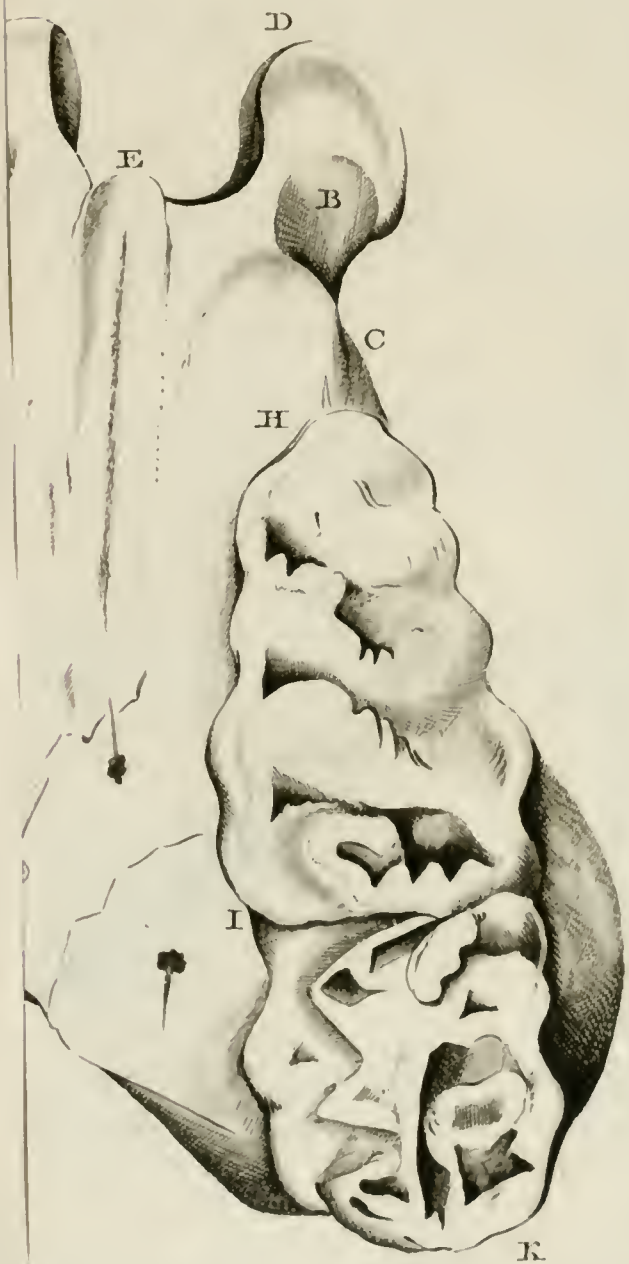
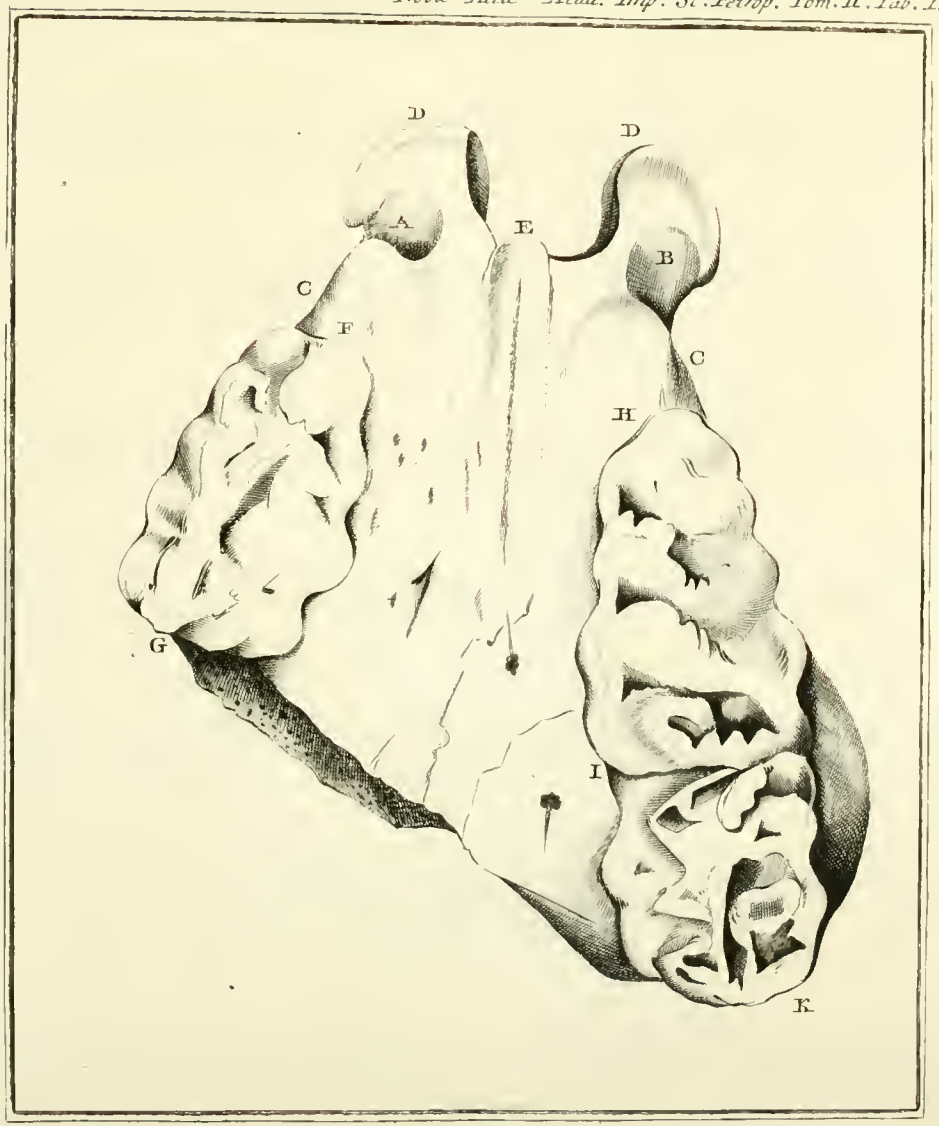


Fig. 31.
Fig. 2.
Fig. 34.
Fig. 26.
Fig. 33.
Fig. 35.
Fig. 37.
Fig. 3.
Fig. 36.
Fig. 30.
Fig. 27.
Fig. 29.
Fig. 28.
Fig. 39.
Fig. 40.


H
D
E
F


A
G
H
D
B
E
C
F


D
E
B
C
H
I
K


D
D
A
E
B
C
F
C
H
G
I
K

-70299

7 1939
1940
1941

AMNH LIBRARY
100127228